

Милена Рачева

Валентина Тодорова-Лазарова

ВИСША МАТЕМАТИКА

Част II

ВИСША МАТЕМАТИКА

часть II

Милена Рачева
Валентина Тодорова-Лазарова



УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
“ВАСИЛ АПРИЛОВ”
ГАБРОВО, 2025

Съдържание

Въведение	5
Глава 1. Функция на две независими променливи	6
Глава 2. Неопределен интеграл	37
Глава 3. Определен интеграл	58
Глава 4. Обикновени диференциални уравнения. Някои основни видове обикновени диференциални уравнения от първи ред	86
Глава 5. Линеен обикновени диференциални уравнения от n -ти ред	103
Библиография	121

Въведение

Настоящият учебник покрива учебния материал, включен в дисциплината *Висша математика – част II*, изучавана от студентите в техническите направления на ОКС „бакалавър“ на Технически университет – Габрово.

Отделните глави са посветени на функция на две променливи; неопределен и определен интеграл и някои техни приложения; обикновени диференциални уравнения от първи и от по-висок ред.

Теоретичният материал е илюстриран с подходящи решени примери, а там, където по преценка на авторите е уместно, са дадени и задачи за самостоятелни упражнения на студентите. Необходимата база, гарантираща разбиране и усвояване на материала, представен в учебника, са знанията от изучаваната *Висша математика – част I*, както и знанията, получени от училищния курс на обучение.

Учебникът би могъл да бъде полезен и на докторанти, специализанти и инженери, които активно прилагат математика в своята работа.

Авторите биха приветствали отзиви, забележки и препоръки, отнасящи се до съдържанието и изложението на този учебник.

юни 2025 г.
гр. Габрово

Глава 1

Функция на две независими променливи

1.1 Околности и области в равнината

Нека $\varepsilon > 0$ и (x_0, y_0) е фиксирана точка в равнината.

Множеството от точки (x, y) , за които

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2,$$

е **кръгова ε -околност**; а множеството от точки (x, y) , за които

$$\begin{cases} |x - x_0| < \varepsilon \\ |y - y_0| < \varepsilon \end{cases}$$

е **квадратна ε -околност**. Числото ε се нарича **радиус** на съответната околност, а точката (x_0, y_0) е нейният център.

Ограничена е областта, за която съществува околност с радиус R (колкото и голям да е той), съдържаща всяка точка от областта.

Една точка е **гранична** (или **контурна**), ако всяка нейна околност съдържа както точки от областта (наричаме ги **вътрешни**), така и точки, не принадлежащи на областта (**външни**).

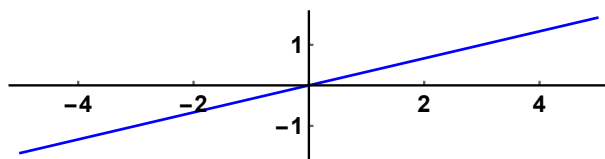
Ако контурните точки се причисляват към областта, тя е **затворена**. В противен случай областта е **отворена**. Когато споменаваме за област в равнината, по подразбиране тя е отворена.

Всяка област, която е ограничена и затворена, се нарича **компактна**.

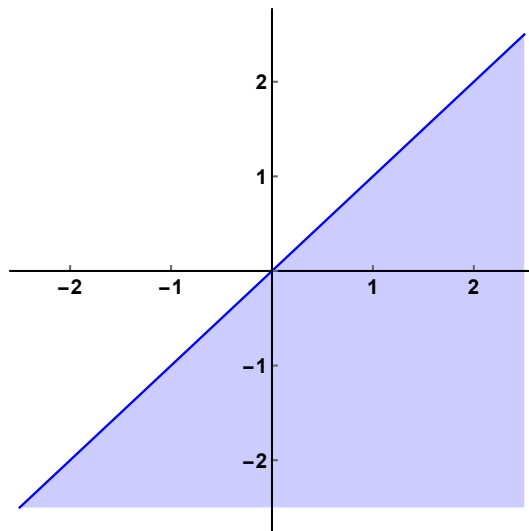
1.2 Определение за функция на две променливи

Определение 1.1 Нека D е област в равнината, а f е правило, по което на всяко $(x, y) \in D$ се съпоставя число $z = f(x, y)$. Казваме, че по този начин е дефинирана **функция $f(x, y)$ на две независими променливи x и y** .

Това може да се запише по следния начин: $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$.



Фигура 1.1: $D = \{(x, y) : x \neq 3y\}$



Фигура 1.2: $D = \{(x, y) : y \leq x\}$

Множеството D от всички точки (x, y) в равнината, за които дадена функция $z = f(x, y)$ има смисъл, се нарича нейно **дефиниционно множество**. Дефиниционното множество на функция на две променливи е съвкупност от точки в равнината и представлява равнинна област (или обединение на такива области).

Пример 1.1: $z \equiv f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - 3y}$

Функцията има смисъл за всички (x, y) , за които знаменателят $x - 3y$ е различен от 0, следователно дефиниционното множество е $D = \{(x, y) : x \neq 3y\}$.

В случая D представлява две отворени полуравнини $x > 3y$ и $x < 3y$, разположени съответно под и над правата с уравнение $x = 3y$ (Фиг. 1.1).

Две функционални стойности на дадената функция на двете независими променливи x и y са например: $z = f(3, 0) = 3$ и $z = f(4, 2) = -6$.

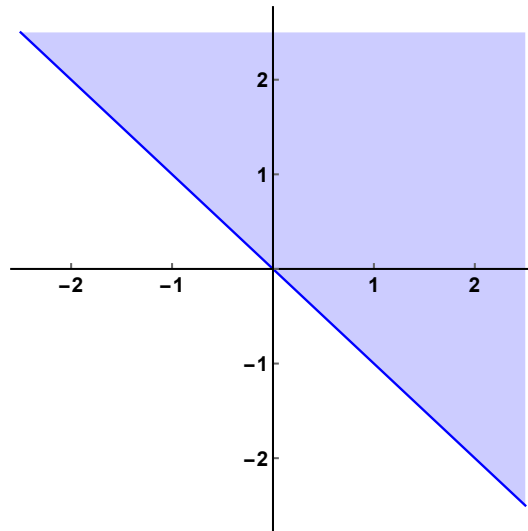
Пример 1.2: $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Предвид дефиницията на логаритмична функция (логаритмува се само положителна величина!),

$$1 - x^2 - y^2 > 0,$$

следователно дефиниционната област е отвореният кръг с радиус 1:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$



Фигура 1.3: $D = \{(x, y) : y > -x\}$

Пример 1.3: $z = \sqrt{x - y}$

Тъй като се коренува с корен втори, то $x - y \geq 0$, т.е. $y \leq x$. Следователно $D = \{(x, y) : y \leq x\}$ (затворена област).

Когато неравенството $y \leq x$ се изпълнява като равенство, т.е. когато $y = x$, това описва всички точки (x, y) , лежащи на правата с това уравнение (ъглополовящата на ъгъла на I и III квадрант). Точките с координати (x, y) , за които е изпълнено $y < x$, са всички точки, лежащи в полуравнината **под** тази права (Фиг. 1.2).

И така, дефиниционното множество се състои от всички точки в равнината, намиращи се върху и под правата с уравнение $y = x$.

От своя страна, $z \in [0, +\infty)$, тъй като $0 \leq \sqrt{x - y} < +\infty$ за всяка точка $(x, y) \in D$.

Пример 1.4: $z = \sqrt{x + y}$

Аналогично на Пример 1.3, имаме $x + y \geq 0$, т.е. $y \geq -x$.

Тогава $D = \{(x, y) : y \geq -x\}$ (затворена област).

Когато неравенството $y \geq -x$ се изпълнява като равенство ($y = -x$), това определя точките с координати (x, y) , които лежат **върху** правата с уравнение $y = -x$ – това е ъглополовящата на ъгъла на II и IV квадрант. Точките с координати (x, y) , за които е изпълнено $y > -x$, са всички точки, лежащи в полуравнината **над** тази права.

Окончателно, дефиниционното множество се състои от всички точки в равнината, намиращи се върху и над правата с уравнение $y = -x$ (Фиг. 1.3).

Тъй като $0 \leq \sqrt{x + y} \leq \infty$ за всяка точка $(x, y) \in D$, то $z \in [0, +\infty)$.

Пример 1.5: $z = \ln(x^2 + y)$

На логаритмуване се подлагат само строго положителни величини, т.е. $x^2 + y > 0$. следователно $y > -x^2$, т.е. $D = \{(x, y) : y > -x^2\}$.

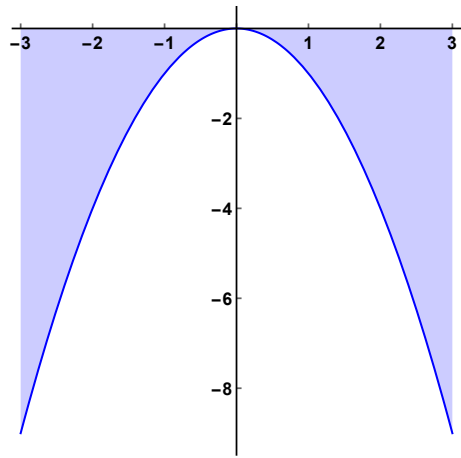
Контурът на дефиниционното множество D е графиката на параболата с уравнение $y = -x^2$. Точките $(x, y) \in D$ се намират **над** графиката на параболата (Фиг. 1.4).

Логаритмичната функция може да приема всевъзможни стойности, т.е. $z \in \mathbf{R}$.

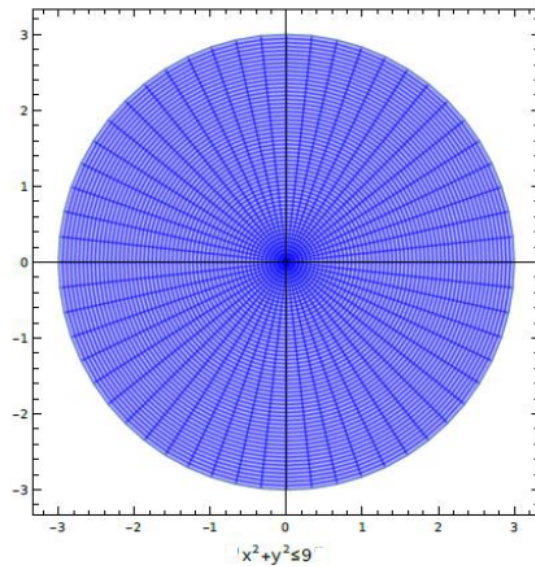
Пример 1.6: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Подкоренната величина трябва да бъде неотрицателна: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е.

$$x^2 + y^2 \leq 3^2.$$



Фигура 1.4: $D = \{(x, y) : y > -x^2\}$



Фигура 1.5: Затвореният кръг с център т. $(0, 0)$ и радиус 3

Следователно D е затвореният кръг с център т. $(0, 0)$ и радиус 3 (Фиг. 1.5).

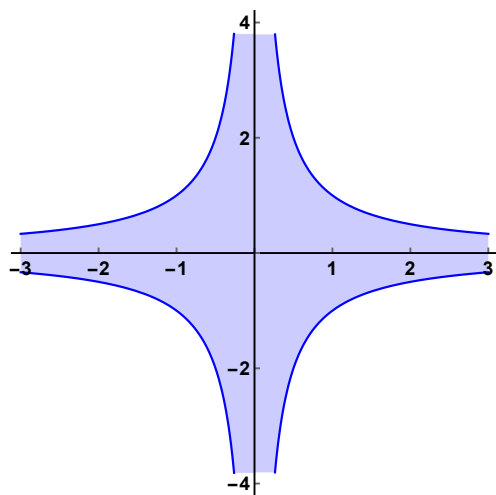
Пример 1.7: $z = \arcsin(xy)$

Както е известно от дефиницията на функцията $\arcsin$, нейният аргумент е в интервала $[-1, 1]$, следователно $-1 \leq xy \leq 1$, т.е.

$$\begin{cases} xy \geq -1 \\ xy \leq 1, \end{cases}$$

откъдето $y \geq -\frac{1}{x}$ и $y \leq \frac{1}{x}$.

Окончателно, дефиниционното множество на разглежданата функция е разположено **между** графиките на хиперболите $y = -\frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$ (Фиг. 1.6).



Фигура 1.6: Дефиниционното множество на функцията $z = \arcsin(xy)$

1.3 Графика на функция на две променливи

Нека е дадена функция $z = f(x, y)$ с дефиниционна област D .

Под **графика** на функцията ще разбираме множеството от точки в пространството

$$\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

В общия случай графиката на функция на две променливи е *повърхнина*.

Като частен случай, ако разгледаме функция, която е линейна относно своите променливи: $z = ax + by + c$, където a, b, c са реални числа (коэффициенти), то нейната графика е *равнина*.

Пример 1.8: $z = 1 - 2x - y$

Щом всичките коефициенти в аналитичния запис на дадената линейна функция са различни от нула, нейната графика е *равнина в общо положение*, т.е. равнина, която не е успоредна нито на координатна равнина, нито на координатна ос, нито минава през координатното начало $O(0, 0, 0)$.

Пресечните точки на тази равнина с координатните оси Ox, Oy и Oz съответно са $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ (Фиг. 1.7).

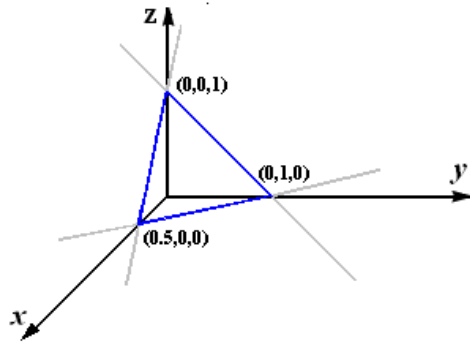
Пример 1.9: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Дефиниционната област (Пример 1.6) се определя от $x^2 + y^2 \leq 9$, което описва затворен кръг с радиус 3.

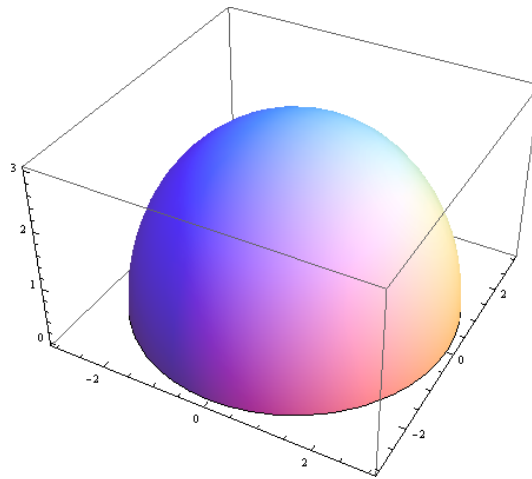
Графиката на функцията представлява горната полусфера с радиус 3 (Фиг. 1.8).

Пример 1.10: $z = x^2 + 4y^2$

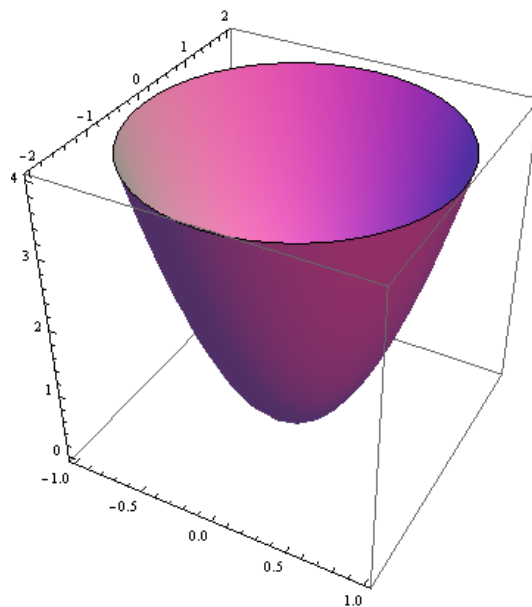
Функцията е дефинирана за всяко $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Графиката ѝ се нарича **елиптичен параболоид** (Фиг. 1.9). Това е повърхнина, която, ако пресечем с хоризонтална



Фигура 1.7: $z = 1 - 2x - y$



Фигура 1.8: Горната полусфера $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



Фигура 1.9: Елиптическият параболоид $z = x^2 + 4y^2$

равнина (успоредна на координатната равнина Oxy) $z = C$, $C > 0$, ще получим елипса с уравнение $x^2 + 4y^2 = C$.

1.4 Граница и непрекъснатост

Разглеждаме функция $z = f(x, y)$ с дефиниционно множество D .

Определение 1.2 Ако за всяка редица от точки, принадлежащи на дефиниционното множество $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$, клоняща към точка $P_0(x_0, y_0)$ съответната редица от функционални стойности $z(x_1, y_1), z(x_2, y_2), \dots, z(x_n, y_n), \dots$ е сходяща и клони към число A , то казваме, че съществува **граница** на функцията $f(x, y)$ при (x, y) , клонящо към (x_0, y_0) .

Бележим с

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A.$$

В сравнение с функция на една независима променлива, тук нещата са по-сложни, тъй като се изисква когато за каквито и да са редици от точки от дефиниционното множество D , клонящи към $P_0(x_0, y_0)$, съответните (числови) редици от функционални стойности да клонят към едно и също число A . Тук точката (x_0, y_0) не е задължително да принадлежи на дефиниционното множество.

Пример 1.11:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy}{\sin x^2 y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{x} \frac{x^2 y}{\sin x^2 y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{x} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{\frac{\sin x^2 y}{x^2 y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{\frac{\sin x^2 y}{x^2 y}} = \frac{1}{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 y}} = 1. \end{aligned}$$

Понятието *граница* на функция на две променливи не бива да се смесва с т. нар. *повторна граница*:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right).$$

Пример 1.12: Границата $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не съществува, защото ако $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ по правата $y = kx$ ($k = \text{const} \neq 0$), то ще получим, че

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

– число, зависещо от параметъра k , който може да приема всяка стойност, различна от 0.

Същевременно обаче $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$.

Определение 1.3 Ако за всяка редица от точки, принадлежащи на дефиниционното множество $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$, клоняща към точка $P_0(x_0, y_0) \in D$ съответната редица от функционални стойности $z(x_1, y_1), z(x_2, y_2), \dots, z(x_n, y_n), \dots$ е сходяща и клони към числото $f(x_0, y_0)$, то казваме, че функцията $f(x, y)$ е **непрекъсната** в точката (x_0, y_0) .

С други думи, за да е непрекъсната функцията в дадена точка $P_0(x_0, y_0) \in D$, то:

1. тази точка $P_0(x_0, y_0)$ принадлежи на дефиниционното множество D ;
2. съществува границата на функцията в тази точка $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$;
3. границата на функцията **съвпада** със стойността на функцията в тази точка:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Дадена функция е **непрекъсната в област**, когато е непрекъсната във всяка точка от областта.

1.5 Частни производни

Нека е дадена функция $z = f(x, y)$ с дефиниционно множество D .

Определение 1.4 Под **частна производна** на функцията $f(x, y)$ относно променливата x в точката $(x_0, y_0) \in D$ разбираме величината

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f(x, y_0))'_{x=x_0}.$$

Аналогично, **частна производна** на функцията $f(x, y)$ относно променливата y в точката $(x_0, y_0) \in D$ е величината

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f(x_0, y))'_{y=y_0}.$$

Ако функцията зависи от една променлива, то нейната производна се нарича **обикновена**. Следователно частната производна относно една от променливите е всъщност обикновена производна при положение, че другата променлива считаме за константа, т.е. е за момент фиксирана.

Пример 1.13: Ще пресметнем частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$ за функцията $f(x, y) = x^3 + y^2$.

Съгласно Определение 1.4,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = (x^3 + y^2)' \Big|_{(x,y)=(2,3)} = 3x^2 \Big|_{(x,y)=(2,3)} = 12,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = (x^3 + y^2)' \Big|_{(x,y)=(2,3)} = 2y|_{(x,y)=(2,3)} = 6.$$

Нека (x, y) е произволна точка от дефиниционната област D .

Частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ се определят от **частните нараствания**:

$$\Delta f_x(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta f_y(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

където Δx и Δy са някакви (малки) нараствания/изменения съответно на променливите x и y .

Тогава по дефиниция

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f_y(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

ако съответните граници съществуват.

Много често се използват и следните означения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_y(x, y).$$

Относно *техниката на диференциране* при функция на две (и повече) независими променливи, когато диференцираме спрямо x , за момент считаме y за константа (число); съответно, когато диференцираме спрямо y , то x считаме за константа.

Пример 1.14: Ще пресметнем частните производни на функцията

$$f(x, y) = x^3 \sin y - 2y^4 :$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 \cos y - 8y^3.$$

Да отбележим, че освен *частни нараствания*, при функция на две променливи съществува и **пълно нарастване**:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

В общия случай $\Delta f(x, y) \neq \Delta f_x(x, y) + \Delta f_y(x, y)!$

Нека за функцията $z = f(x, y)$ съществуват частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Тези производни от своя страна също са функции на двете независими променливи x и y .

Частните производни на тези функции се наричат **частни производни от втори ред** на функцията $f(x, y)$.

Всяка от производните от първи ред $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ има две частни производни – относително x и относително y . По този начин се получават четири частни производни от втори ред, които се дефинират и означават по следния начин:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Производните $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ се наричат **смесени**. Първата се получава чрез диференциране първо относително x , а после относително y ; при другата е обратно.

При непосредствено пресмятане на смесени производни от втори ред на редица функции се получава еднакъв резултат и това не е случайно. В сила е следната обща теорема:

Теорема 1.1 *Ако смесените производни от втори ред на функцията $z = f(x, y)$ са непрекъснати, те са равни помежду си:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Въз основа на Теорема 1.1, ако условието за непрекъснатост е изпълнено, говорим вече не за четири, а за три на брой производни от втори ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Частни производни на частните производни от втори ред се наричат **частни производни от трети ред** и т.н.

Пример 1.15: Ще пресметнем частните производни от първи и втори ред на функцията $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.

Първо пресмятаме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2.$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x^2y.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (4x^3 - 4xy^2)'_x = 12x^2 - 4y^2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (4y^3 - 4x^2y)'_y = 12y^2 - 4x^2. \end{aligned}$$

Пресмятаме и смесената производна

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (4x^3 - 4xy^2)'_y = -8xy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

1.6 Пълен диференциал

Определение 1.5 *Величината*

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Delta y \quad (1.1)$$

се нарича **пълен (тотален) диференциал** на функцията $f(x, y)$.

Пълният диференциал $df(x, y)$ е **главна част** на пълното нарастване на функцията $\Delta f(x, y)$:

$$\Delta f(x, y) = df(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

където $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ е *безкрайно малка* величина, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

(Напомниме, че $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$!)

Ако разгледаме частния случай, при който $f(x, y) = x$, то тогава естествено $df(x, y) = dx$. От друга страна обаче, като заместим в (1.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, получаваме $df(x, y) = \Delta x$. Следователно

$$\Delta x = dx. \quad (1.2)$$

Аналогично, ако разгледаме частния случай $f(x, y) = y$, получаваме

$$\Delta y = dy. \quad (1.3)$$

От (1.1), (1.2) и (1.3) за пълния диференциал получаваме:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy. \quad (1.4)$$

Предвид Определение 1.5, в сила са следните *основни правила* за работа с пълен диференциал:

1. $d(C) = 0$, $C = \text{const}$;

2. $d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2$;

3. $d(kf) = k df$, $k = \text{const}$;

4. $d(f_1 f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1$;

5. $d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_2^2}$;

6. $dF(u(x, y)) = F'(u) du(x, y)$.

Пример 1.16: Ще намерим пълния диференциал на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Тъй като $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, то $d(x^2 + y^2) = 2x dx + 2y dy = 2(x dx + y dy)$.

Пример 1.17: Ще намерим частните производни и пълния диференциал на функцията $f(x, y) = \sqrt{xy}$ в точката $(1, 4)$.

В случая

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (\sqrt{xy})'_x = \sqrt{y} (\sqrt{x})'_x = \sqrt{y} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (\sqrt{xy})'_y = \sqrt{x} (\sqrt{y})'_y = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}},\end{aligned}$$

откъдето намираме

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} dx + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y dx + x dy).$$

Следователно

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \right|_{(x,y)=(1,4)} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y}(1, 4) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right|_{(x,y)=(1,4)} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

и съответно $df(1, 4) = dx + \frac{1}{4} dy$.

По аналогия на (1.4) се въвежда и понятието **пълен диференциал от втори ред**:

Определение 1.6 *Величината*

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) (dy)^2$$

се нарича **пълен диференциал от втори ред** на функцията $f(x, y)$.

В случай, че смесените частни производни от втори ред са равни помежду си, пълният диференциал от втори ред добива вида

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) (dy)^2 \quad (1.5)$$

Пример 1.18: Ще намерим частните производни и пълните диференциали от I и II ред на функцията $f(x, y) = xy - y^2 + 2x$ в точката $(3, -2)$.

И така, в случая:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy - y^2 + 2x)'_x = y + 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy - y^2 + 2x)'_y = x - 2y,$$

$$df(x, y) = (y + 2) dx + (x - 2y) dy,$$

следователно пресмятаме: $\frac{\partial f}{\partial x}(3, -2) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3, -2) = 7$, откъдето $df(3, -2) = 7 dy$.

Съответно, за производните от втори ред получаваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = (y + 2)'_x = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (x - 2y)'_y = -2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (x - 2y)'_x = 1.\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}d^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) (dy)^2 \\ &= 2 dx dy - 2(dy)^2 = 2dy (dx - dy).\end{aligned}$$

Тъй като производните от II ред са константи, то резултатите за тях и за диференциала от II ред са валидни за всяка точка (x, y) , а следователно в частност и за точката $(3, -2)$.

1.7 Локални екстремуми на функции на две променливи

Определение 1.7 Казваме, че функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ има **локален екстремум** в точката $(x_0, y_0) \in D$ и по-конкретно:

- **локален максимум**, ако съществува такава околност на тази точка, че е изпълнено $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ за всяка точка (x, y) от тази околност;
- **локален минимум**, ако съществува такава околност на тази точка, че е изпълнено $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ за всяка точка (x, y) от тази околност.

В първия случай (при максимум) върху графиката на функцията точката (x_0, y_0) ще бъде "върх"; във втория случай (при минимум) точката ще бъде "долина".

Следващата теорема дава **необходимо условие** за локален екстремум на диференцируема функция на две променливи:

Теорема 1.2 Ако в околност на точката $(x_0, y_0) \in D$ съществуват частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ и в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ достига локален екстремум, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Условието (1.6) е предпоставка за наличие на локален екстремум, без обаче да го гарантира. С други думи, това условие е необходимо, но не и **достатъчно**.

За да формулираме **достатъчно условие** за локален екстремум на диференцируема функция на две променливи, ще въведем следното означение:

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.3 Нека в околност на точката $(x_0, y_0) \in D$ функцията $f(x, y)$ притежава производни от първи и втори ред и в т. (x_0, y_0) е изпълнено условието (1.6).

Тогава:

- ако $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има локален екстремум, който е максимум при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ и минимум при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$;
- ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум;
- ако $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ може да има, а може и да няма локален екстремум.

Точка от дефиниционната област D , която изпълнява условие (1.6), се нарича **стационарна**.

Стационарна точка, която обаче не е точка на локален екстремум, се нарича **седлова**.

Забележка 1.1 Теорема 1.2 дава необходимо, а Теорема 1.3 – достатъчно условие за наличие на локален екстремум в точки, в които функцията е диференцируема. Трябва да отбележим обаче, че екстремум може да се достига и в точки, в които съответната функция не е диференцируема.

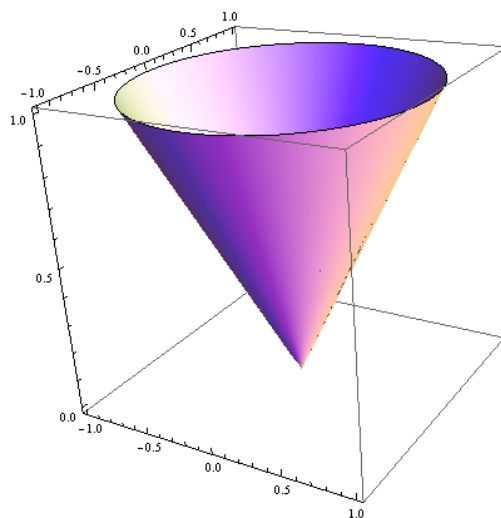
Така например, функцията $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ има локален минимум в началото на координатната система $O(0, 0)$, но в тази точка функцията не притежава производни. Графиката на тази функция е безкраен прав кръгов конус с връх в координатното начало и ос, съвпадаща с оста Oz (Фиг. 1.10).

Следователно, ако разглеждаме не само диференцируеми, а по-общо, непрекъснати функции, трябва да обобщим, че локален екстремум може да се достига не само в стационарни точки, а също и в точки от дефиниционната област, в които функцията не е диференцируема.

Пример 1.19: Ще изследваме за локални екстремуми функцията

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 5x - 4y + 10.$$

Съгласно Теорема 1.2 и Теорема 1.3, търсим стационарни точки на функцията като решение на системата:



Фигура 1.10: Конусът $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 5 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Това е система от две линейни уравнения с две неизвестни. Ако от първото уравнение изразим $y = 2x + 5$ и го заместим във второто, получаваме $3x + 6 = 0$, откъдето $x = -2$ и следователно $y = 1$. И така, единствената стационарна точка е $(-2, 1)$.

За да определим дали в тази точка има локален екстремум, образуваме $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Забележка 1.2 Това, че във всяка точка (x, y) е изпълнено $\Delta(x, y) > 0$ не означава, че във всяка точка функцията има локален екстремум! Напомняме, че при диференцируеми функции (а случаят е такъв) съгласно Теорема 1.2 екстремум евентуално се достига само в стационарна точка.

Тъй като $\Delta(x, y) = 3 > 0$ за всяко (x, y) , то $\Delta(-2, 1) = 3 > 0$, следователно в точката $(-2, 1)$ функцията има локален екстремум.

Понеже $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, 1) = 2 > 0$, екстремумът е минимум. Пресмятаме стойността му:

$$f_{\min}(-2, 1) = 3.$$

Пример 1.20: Ще изследваме за локални екстремуми функцията

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y.$$

За да намерим стационарни точки на функцията, съставяме системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 18 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $y = \frac{3}{x}$ и заместваме във второто:

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0, \text{ т.е. } (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0.$$

Това уравнение има четири решения: $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm 3$. Като ги заместим в $y = \frac{3}{x}$, получаваме съответните стойности за y : $y_{1,2} = \pm 3$ и $y_{3,4} = \pm 1$.

Тогава стационарните точки са: $(1, 3)$, $(-1, -3)$, $(3, 1)$, $(-3, -1)$.

Образуваме детерминантата $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{vmatrix} = 36y^2 - 36x^2 = 36(y^2 - x^2).$$

Пресмятаме стойността на $\Delta(x, y)$ в стационарните точки:

$\Delta(\pm 1, \pm 3) = 36(9 - 1) = 288 > 0$, следователно в точките $(\pm 1, \pm 3)$ функцията има локални екстремуми.

Тъй като $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 3) = 18 > 0$, $(1, 3)$ е точка на локален минимум; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -3) = -18 < 0$, следователно $(-1, -3)$ е точка на локален максимум.

$\Delta(\pm 3, \pm 1) = 36(1 - 9) = -288 < 0$, следователно в точките $(\pm 3, \pm 1)$ функцията няма локални екстремуми.

Накрая пресмятаме стойностите на получените локални екстремуми:

$$f_{\min}(1, 3) = -72, \quad f_{\max}(-1, -3) = 72.$$

Пример 1.21: Разглеждаме функцията

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 10.$$

Производните от I ред на функцията са:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 36.$$

Търсим стационарните точки:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 36 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{array} \right.$$

От второто уравнение на системата изразяваме $y = \frac{6}{x}$ (защо всъщност можем да делим на x ?) и заместваме в първото уравнение:

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 13, \quad \text{откъдето } x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

следователно $x^2 = 4$ или $x^2 = 9$, т.е. съответно $x = \pm 2$ или $x = \pm 3$.

Тогава, като вземем предвид $y = \frac{6}{x}$, получаваме следните стационарни точки: $(3, 2); (-3, -2); (2, 3); (-2, -3)$.

Производните от втори ред са:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x.$$

Тогава

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Стойността на $\Delta(x, y)$ в стационарните точки е:

$$\Delta(\pm 3, \pm 2) = 180 > 0, \quad \Delta(\pm 2, \pm 3) = -180 < 0,$$

откъдето заключаваме, че в точките $(\pm 3, \pm 2)$ функцията има локални екстремуми, а точките $(\pm 2, \pm 3)$ са седлови, т.е. в тях няма локални екстремуми.

При това, тъй като $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 2) = 18 > 0$, то $(3, 2)$ е точка на локален минимум; тъй като $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, -2) = -18 < 0$, то $(-3, -2)$ е точка на локален максимум:

$$f_{\min}(3, 2) = -116, \quad f_{\max}(-3, -2) = 136.$$

1.8 Условни екстремуми на функции на две променливи

Нека са дадени функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ и условие, даващо връзка между независимите променливи: $\varphi(x, y) = 0$.

Задачата за **условен екстремум** на функция на две променливи е следната: измежду всички точки (x, y) , които удовлетворяват условието $\varphi(x, y) = 0$ да се намерят тези, в които функцията $z = f(x, y)$ достига екстремални стойности.

За разлика от обичайните точки на локални екстремуми сега стойността на функцията в точките на условен екстремум се сравняват със стойностите на функцията не във всички точки в околност на екстремалните, а само в тези от тях, които изпълняват зададеното условие.

И така, при зададена функция $z = f(x, y)$ с дефиниционна област D търсим в кои измежду точките от D , координатите на които удовлетворяват условие $\varphi(x, y) = 0$, функцията има екстремални стойности.

Ако видът на условието е такъв, че от него една от променливите може да се изрази в явен вид посредством другата променлива, то като я заместим в аналитичния израз на функцията z , получаваме функция на една независима променлива. По този начин стигаме до добре познатата задача за локален екстремум на функция на една променлива.

Пример 1.22: Върху хиперболата $x^2 - y^2 = 4$ да се намери тази точка, разстоянието на която до точката $M_2(0, 2)$ е най-малко (Фиг. 1.11).

Квадратът на разстоянието от произволна точка $M(x, y)$ до точката $M_0(0, 2)$ е:

$$z(x, y) = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2.$$

Това е всъщност функцията, чиито екстремуми (и по-точно минимум) търсим при положение, че точките, сред които търсим, лежат върху хиперболата, т.е. изпълняват условие $x^2 - y^2 = 4$.

От зададеното условие изразяваме, че $x^2 = y^2 + 4$ и заместваем x^2 в израза на функцията:

$$z = x^2 + (y - 2)^2 = y^2 + 4 + (y - 2)^2 = y^2 + 4 + y^2 - 4y + 4 = 2(y^2 - 2y + 4).$$

Изследваме функцията $z = 2(y^2 - 2y + 4)$ за локални екстремуми. Първата производна

$$z'_y = 2(2y - 2) = 4(y - 1)$$

се анулира в точката $y = 1$, следователно тази точка е критична. В нея производната сменя знака си, така че това е точка на локален екстремум. Тъй като смяната на знак в точката $y = 1$ е от $-$ към $+$, то локалният екстремум е минимум.

Намираме съответната стойност на x при $y = 1$: $x^2 = 1^2 + 4 = 5$, следователно $x = \pm\sqrt{5}$.

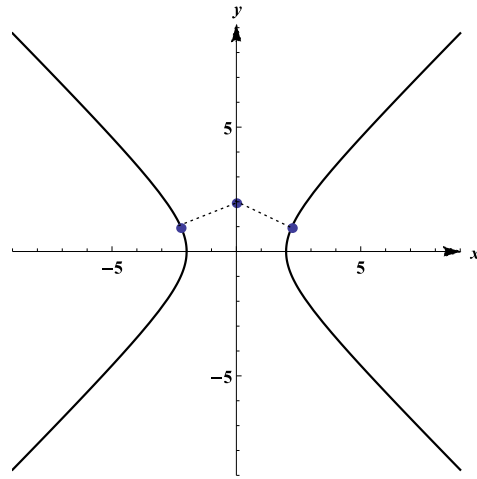
И накрая, условният минимум, който се достига в двете точки $(\pm\sqrt{5}, 1)$ (Фиг. 1.11), трябва да се пресметне (заместваем (x, y) с тези точки в аналитичния израз на функцията:

$$f_{\min}(\pm\sqrt{5}, 1) = (\pm\sqrt{5})^2 + (1 - 2)^2 = 5 + 1 = 6.$$

В общия случай, когато от условието $\varphi(x, y) = 0$ не можем да изразим една от променливите и по този начин да я изключим от израза на функцията, се налага да съставим спомагателна **функция на Лагранж**, която отчита както функцията, чийто екстремум се търси, така и наложеното условие:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \quad (1.7)$$

В така въведената функция λ е параметър, който се нарича **множител на Лагранж**.



Фигура 1.11: Хиперболатата $x^2 - y^2 = 4$

Търсим стационарните точки на $F(x, y, \lambda)$ от системата:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Системата (1.8) е от три уравнения, с три неизвестни – x , y и λ . Решенията на тази система (ако има такива) представляват стационарни точки (x_0, y_0) при съответна стойност λ_0 на множителя на Лагранж λ .

Тази система ни дава **необходимо условие** за условен екстремум в случай на диференцируема функция.

За да формулираме **достатъчно условие** в следващата Теорема 1.4, нека да припомним, че предвид (1.5) от Определение 1.6, диференциалът от втори ред на спомагателната функция $F(x, y, \lambda)$ е:

$$d^2 F(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, \lambda) (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, \lambda) (dy)^2.$$

Теорема 1.4 Нека в околност на точката $(x_0, y_0) \in D$ функцията $F(x, y, \lambda)$ притежава производни от първи и втори ред и (x_0, y_0, λ_0) е решение на системата (1.8).

Тогава:

- ако $d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има условен минимум;

- ако $d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има условен максимум;

- ако $d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ може да има, а може и да няма условен екстремум.

Пример 1.23: Ще намерим екстремумите на функцията

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

при условие, че $x^2 + y^2 = 2x + 3$. В този пример елиптичният параболоид $z = x^2 + 2y^2$ се изрязва от кръговия цилиндър $x^2 + y^2 = 2x + 3$.

Ще решим задачата по два начина.

Първи начин. Съставяме спомагателна функция $F(x, y, \lambda)$, която отчита както функцията z , така и условието. Обръщаме внимание на това, че условието трябва да бъде във вида $\varphi(x, y) = 0$, така че в случая $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

Тогава, съгласно (1.7):

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3).$$

Търсим стационарните точки на спомагателната функция $F(x, y, \lambda)$ като решения на системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda(x - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x + \lambda(x - 1) = 0 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{array} \right. .$$

Да разгледаме второто уравнение от получената система. От него следва, че или $y = 0$, или $2 + \lambda = 0$, т.е. $\lambda = -2$.

I случай. Когато $y = 0$, след като го заместим, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x + \lambda(x - 1) = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0. \end{array} \right.$$

Второто от уравненията (квадратно) има корени $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Заместваме x с тези стойности в първото уравнение и получаваме съответни стойности за параметъра λ : $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

Следователно от този случай получихме следните стационарни точки: $(-1, 0)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $(3, 0)$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Сега ще разгледаме и **II случай**.. Когато $\lambda = -2$, го заместваме в получената система и стигаме до:

$$\left| \begin{array}{l} x - 2x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y^2 - 3 = 0 \end{array} \right.$$

Решенията на тази система са стационарните точки $(2, \pm\sqrt{3})$, получени при $\lambda = -2$. След като стационарните точки са вече намерени, пресмятаме частните производни от втори ред на $F(x, y, \lambda)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, \lambda) = 4 + 2\lambda.$$

Тогава

$$d^2 F(x, y, \lambda) = (2 + 2\lambda)(dx)^2 + (4 + 2\lambda)(dy)^2.$$

Пресмятаме стойността на $d^2 F(x, y, \lambda)$ в стационарните точки:

- $d^2 F(-1, 0, -\frac{1}{2}) = (dx)^2 + 3(dy)^2$, следователно в точката $(-1, 0)$ функцията z има условен минимум: $f_{\min}(-1, 0) = 1$.
- $d^2 F(3, 0, -\frac{3}{2}) = -(dx)^2 + (dy)^2$ и сега ще направим допълнителни разглеждания, за да определим знака.

Вземаме диференциал от зададеното условие: $d(x^2 + y^2 - 2x - 3) = 0$, следователно

$$(x^2 + y^2 - 2x - 3)'_x dx + (x^2 + y^2 - 2x - 3)'_y dy = 0$$

т.е. получаваме следната зависимост: $(2x - 2)dx + 2ydy = 0$.

Като заместим в нея x и y с координатите на разглежданата в момента точка $(3, 0)$, получаваме $4dx = 0$, т.е. $dx = 0$.

Щом в точката $(3, 0)$ имаме $dx = 0$, то $d^2 F(3, 0, -\frac{3}{2}) = (dy)^2 > 0$, което означава, че и в тази точка функцията z има условен минимум: $f_{\min}(3, 0) = 9$.

- $d^2 F(2, \pm\sqrt{3}, -2) = -2(dx)^2 < 0$, следователно в двете стационарни точки $(2, \pm\sqrt{3})$ функцията z има условни максимуми: $f_{\max}(2, \pm\sqrt{3}) = 10$.

Втори начин. От зададеното условие получаваме $y^2 = -x^2 + 2x + 3$, което замества в функцията и достига до:

$$z(x) = -x^2 + 4x + 6;$$

$$z'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \quad y^2 = -4 + 4 + 3 = 3, \quad y = \pm\sqrt{3}.$$

Тъй като $z'' < 0$, то и в двете стационарни точки $M_{1,2}(2, \pm\sqrt{3})$ ще имаме локален минимум

$$z_{\min}(2, \pm\sqrt{3}) = 10.$$

Граничните точки за $x \in [-1, 3]$ също се изследват (виж следващия параграф 1.9), защото $M_3(-1, 0)$ и $M_4(3, 0)$ са вътрешни точки за кривата от условието – окръжността $x^2 + y^2 = 2x + 3$.

Тогава $z(-1, 0) = 1$ и $z(3, 0) = 9$.

Нека ε е произволно малък параметър.

За $x = -1 + \varepsilon$:

$$y^2 = -(-1 + \varepsilon)^2 + 2(-1 + \varepsilon) + 3 = 4\varepsilon - \varepsilon^2;$$

$$z(-1 + \varepsilon, 4\varepsilon - \varepsilon^2) = (-1 + \varepsilon)^2 + 2(4\varepsilon - \varepsilon^2) = 1 + 6\varepsilon - \varepsilon^2 > 1.$$

За $x = 3 - \varepsilon$:

$$y^2 = -(3 - \varepsilon)^2 + 2(3 - \varepsilon) + 3 = 4\varepsilon - \varepsilon^2;$$

$$z(3 - \varepsilon, 4\varepsilon - \varepsilon^2) = (3 - \varepsilon)^2 + 2(4\varepsilon - \varepsilon^2) = 9 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 > 9.$$

Следователно точките $M_3(-1, 0)$ и $M_4(3, 0)$ са точки на локален минимум:

$$z_{\min}(-1, 0) = 1 \quad \text{и} \quad z_{\max}(3, 0) = 9.$$

Пример 1.24: Ще намерим екстремумите на функцията

$$f(x, y) = 1 - xy$$

върху единичната окръжност $x^2 + y^2 = 1$.

Съставяме спомагателната функция

$$F(x, y, \lambda) = 1 - xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

и съставяме и решаваме съответната система (1.8), за да намерим стационарните точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = -y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = -x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array} \right.$$

Ако извадим почленно първите две уравнения, получаваме:

$$-y + x + 2\lambda x - 2\lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2\lambda(x - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(1 + 2\lambda) = 0,$$

което налага да разгледаме два случая.

I случай. $x - y = 0$, т.е. $y = x$, което замества в първото и третото уравнение (или второто и третото!) и получаваме

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2\lambda x = 0 \\ 2x^2 = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(2\lambda - 1) = 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda x = \frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.,$$

следователно получените от този случай стационарни точки са $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$.

II случай. $1 + 2\lambda = 0$, т.е. $\lambda = -\frac{1}{2}$, което замества в първото и третото уравнение и получаваме

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.,$$

следователно получените от втория случай стационарни точки са $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Пресмятаме частните производни от втори ред на спомагателната функция $F(x, y, \lambda)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, \lambda) = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) = -1; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, \lambda) = 2\lambda,$$

откъдето за диференциала от втори ред получаваме:

$$d^2 F(x, y, \lambda) = 2\lambda (dx)^2 - 2 dx dy + 2\lambda (dy)^2.$$

Пресмятаме $d^2 F(x, y, \lambda)$ в стационарните точки, като всъщност от значение е знакът му:

- $d^2 F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = (dx)^2 - 2dxdy + (dy)^2 = (dx - dy)^2 > 0,$
- $d^2 F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = -(dx)^2 - 2dxdy - (dy)^2 = -(dx + dy)^2 < 0,$

следователно в точките $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ функцията има условен минимум, а в точките $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – условен максимум.

Съответно пресмятаме:

$$f_{\min}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad f_{\max}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

1.9 Най-голяма и най-малка стойност на функции на две променливи (абсолютен екстремум)

За функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ обикновено максимумът (ако съществува) не е най-голяма стойност на функцията.

Твърде често съществуват безброй много точки от дефиниционната област D , в които функцията приема стойности, по-големи от стойността на локалния максимум. Същото се отнася и за локалния минимум – локалните екстремуми са екстремални стойности, но само в *локален смисъл*, т.е. сравнени със стойности на функцията в точки, намиращи се в околност на екстремалните.

Точката, в която функцията приема най-голяма (най-малка) стойност, се нарича **абсолютен максимум (минимум)**.

Задачата за намиране на най-голяма ($z_{\text{HГC}}$) и най-малка ($z_{\text{HМС}}$) стойност на функцията $z = f(x, y)$ се разглежда в *ограничена и затворена (компактна) област $\tilde{D}$* , която изцяло лежи в дефиниционната област D , т.е. $\tilde{D} \subseteq D$.

Най-важният теоретичен резултат, който касае разглеждания въпрос, е една теорема на Вайерщрас (1815-1897):

Теорема 1.5 *Всяка функция, която е непрекъсната в ограничена и затворена област, достига в тази област своята най-голяма и най-малка стойност.*

Задачата за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция в ограничена и затворена област $\tilde{D} \subseteq D$ има два етапа:

I. търсим стационарни точки, вътрешни за областта $\tilde{D} \subseteq D$;

II. търсим екстремуми по границата на областта $\tilde{D}$.

Вторият етап всъщност или се свежда до едномерна задача в краен и затворен интервал, или се състои в намиране на условни екстремуми (условието е точките да лежат върху границата на $\tilde{D}$).

Забележка 1.3 *Тъй като в крайна сметка ще сравняваме получени стойности в конкретни (краен брой) точки, не е необходимо да се определя вида на екстремумите, както ще видим в следващите примери.*

Пример 1.25: Ще намерим най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

в единичния затворен квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (Фиг. 1.12).

Първо търсим стационарни точки на функцията, като се интересуваме само от тези от тях, които попадат вътре в областта.

Тъй като $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$, то

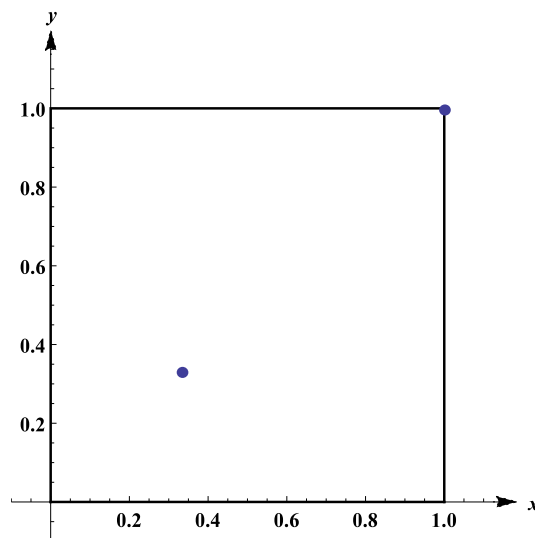
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy.$$

Решаваме системата

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}.$$

Решенията са точките $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, от които първите три точки са по границата на областта, а само последната е вътрешна. За нея пресмятаме $z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

Границата на областта се състои от 4 отсечки:



Фигура 1.12: Единичният квадрат

- $y = 0, x \in [0, 1]$; тогава $f(x, 0) = 0$;
- $x = 1, y \in [0, 1]$; тогава $f(1, y) = -y^2$, която е монотонно намаляваща за $y \in [0, 1]$, следователно най-малката ѝ стойност е при $y = 1$: $z(1, 1) = -1$, а най-голямата е при $y = 0$: $z(1, 0) = 0$;
- $y = 1, x \in [0, 1]$; тогава $f(x, 1) = -x^2$, която е монотонно намаляваща за $x \in [0, 1]$, следователно най-малката ѝ стойност е при $x = 1$: $z(1, 1) = -1$, а най-голямата е при $x = 0$: $z(0, 1) = 0$;
- $x = 0, y \in [0, 1]$; тогава $f(0, y) = 0$.

Измежду всички екстремални стойности, получени по границата и стойността във вътрешната за областта стационарна точка избираме най-голямата и най-малката, показани на Фиг. 1.12 :

$$f_{\text{НГС}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}, \quad f_{\text{НМС}}(1, 1) = -1.$$

Пример 1.26: Ще намерим най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = xy$ в областта $x^2 + y^2 \leq 8$.

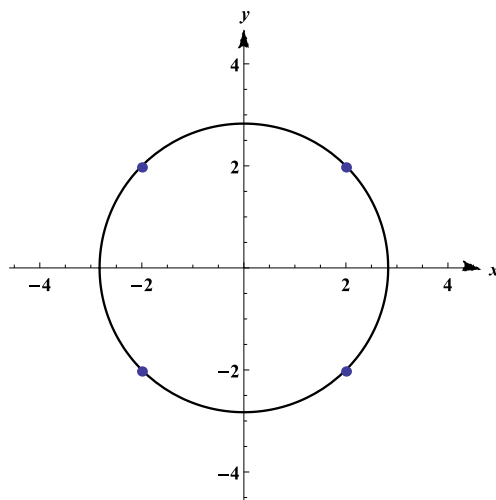
Зададената област е затворен кръг с център – координатното начало $O(0, 0)$ и радиус $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (Фиг. 1.13).

Първо търсим стационарни точки на функцията, вътрешни за областта.

Пресмятаме, че

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

следователно единствената стационарна точка е $(0, 0)$ (центърът на областта). В нея $f(0, 0) = 0$.



Фигура 1.13: Окръжността $x^2 + y^2 = 8$

За да намерим екстремалните точки на функцията по границата (границата е окръжността $x^2 + y^2 = 8$!), трябва да разгледаме задачата за условен екстремум на функцията $f(x, y) = xy$ при условие $x^2 + y^2 - 8 = 0$.

Съставяме спомагателната функция

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Намираме стационарните ѝ точки като решения на системата:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array} \right. .$$

Ако извадим почленно първите две уравнения от системата, получаваме

$$y - x + 2\lambda(x - y) = 0, \text{ т.е. } (y - x)(1 - 2\lambda) = 0.$$

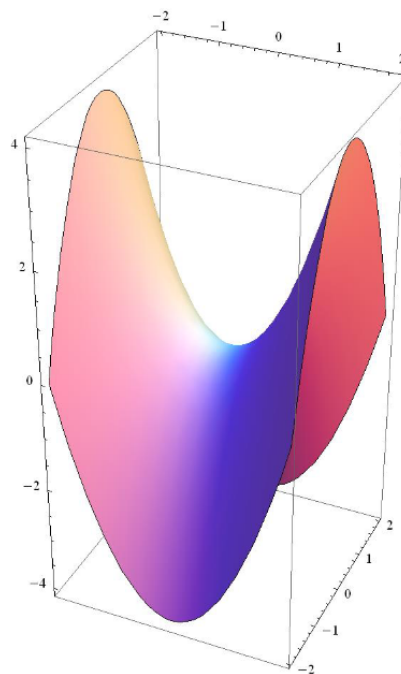
Оттук следва, че или $y - x = 0$, или $1 - 2\lambda = 0$.

В първия случай, като заместим $y = x$ в системата, получаваме $1 + 2\lambda = 0$, $2x^2 = 8$, откъдето $x = y = \pm 2$ и $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Във втория случай, заместваме $\lambda = \frac{1}{2}$ в системата и получаваме $y + x = 0$, $2x^2 = 8$, откъдето $x = \pm 2$ и $y = -x = \mp 2$.

И така, получихме стационарните точки $(\pm 2, \pm 2)$ и $(\pm 2, \mp 2)$ (отбелязани на Фиг. 1.13). Без да се интересуваме какъв по вид условен екстремум в коя от точките се достига, пресмятаме стойността на функцията в тях:

$$f(\pm 2, \pm 2) = 4, \quad f(\pm 2, \mp 2) = -4.$$



Фигура 1.14: Хиперболичният параболоид $z = x^2 - y^2$

Накрая, сравняваме функционалните стойности във всички стационарните точки, т.е. $(0, 0)$, $(\pm 2, \pm 2)$ и $(\pm 2, \mp 2)$ и правим извода, че

$$f_{\text{HГС}}(\pm 2, \pm 2) = 4, \quad f_{\text{HМС}}(\pm 2, \mp 2) = -4.$$

Задачи за упражнение:

1.1. Определете дефиниционното множество на функцията $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

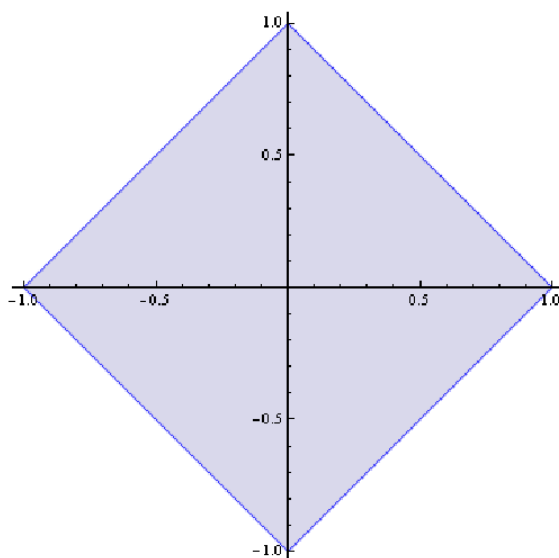
Упътване: използвайте Пример 1.3 и Пример 1.4

1.2 Намерете частните производни и пълните диференциали от I и II ред на функцията $f(x, y) = x^2y - xy^2$.

1.3. Да се изследва за локални екстремуми функцията $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27xy + 27$.
Отг. $f_{\min}(9, 9) = -702$

1.4. Да се изследва за локални екстремуми функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$.
Отг. няма локални екстремуми, т. $(0, 0)$ е седлова (Фиг. 1.14)

1.5. Да се изследва за локални екстремуми функцията $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
Отг. $f_{\min}(0, 0) = 0$; $f_{\max}\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27}$



Фигура 1.15: областта, заградена от правите $y = 1 - x$; $y = 1 + x$; $y = -1 - x$; $y = -1 + x$

1.6. Да се изследва за локални екстремуми функцията $f(x, y) = xy(1 - x - y)$.

$$Отг. f_{\max} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{27}$$

1.7. Да се изследва за екстремуми функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$ с условие $2x - 4y + 1 = 0$.

$$Отг. f_{\min} \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{12}$$

1.8. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y) = xy$ в областта $\tilde{D} : x \geq 0$; $y \geq 0$; $y \leq 2 - 2x$ (вътрешността на триъгълник с върхове $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$).

$$Отг. f_{\text{HГC}} \left(\frac{1}{2}, 1 \right) = \frac{1}{2}, f_{\text{HMC}}(0, 0) = 0$$

1.9. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y) = xy^2(2 - x - y)$ в областта $\tilde{D} : x \geq 0$; $y \geq 0$; $y \leq 6 - x$ (вътрешността на триъгълник с върхове $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 6)$).

$$Отг. f_{\text{HГC}} \left(\frac{1}{2}, 1 \right) = \frac{1}{4}; f_{\text{HMC}}(2, 4) = -128$$

1.10. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 1$ в квадратната област, заградена от правите с уравнения: $y = 1 - x$; $y = 1 + x$; $y = -1 - x$ и $y = -1 + x$ (Фиг 1.15).

Упътване: използвайте симетричността на функцията и областта

Глава 2

Неопределен интеграл

2.1 Определение за неопределен интеграл

Основната задача на *диференциалното смятане* е: при положение, че е зададена функция $f(x)$, да намерим нейната производна $f'(x)$. *Интегралното смятане* решава обратната задача, а именно: ако знаем производната на някоя функция, да възстановим самата функция. От тази всъщност функция е произлязла нейната производна и ние имаме информация само за нея, а не за самата функция.

И така, ако ни е известна функция $f(x)$ ние задаваме въпроса: коя е тази функция $F(x)$ такава, че $F'(x) = f(x)$?

Определение 2.1 Диференцируемата функция $F(x)$, за която $F'(x) = f(x)$, се нарича **примитивна** на функцията $f(x)$.

Така например:

x е примитивна на 1, защото $(x)' = 1$;

x^2 е примитивна на $2x$, защото $(x^2)' = 2x$;

$\sin x$ е примитивна на $\cos x$, защото $(\sin x)' = \cos x$;

$\sin x + 3$ е примитивна на $\cos x$, защото $(\sin x + 3)' = \cos x$.

Очевидно, ако в последния пример заменим числото 3 с кое да е друго число, ще се получи същият резултат. Това ни провокира да твърдим, че ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, а C е произволна константа (число!), то $F(x) + C$ също е примитивна на $f(x)$.

Това действително е така, тъй като

$$(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$

Следователно, ако функция $f(x)$ притежава примитивна $F(x)$, то притежава безброй много примитивни, които се получават, като към $F(x)$ прибавяме всевъзможни числа.

Забележка 2.1 Излиза, че ако трябва да възстановим някоя функция, имайки информация само за нейната производна, не можем да го извършим напълно – възстановяваме функцията, но с точност до събираемо, което е константа.

Нещо повече, ако функцията $f(x)$ притежава примитивна $F(x)$, то, макар и безброй много, всички примитивни функции са от вида $F(x) + C$.

Действително, допускаме, че съществува друга функция $\Phi(x)$, която е примитивна на $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$.

Тогава:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

следователно $\Phi(x) - F(x) = C = \text{const}$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$.

И така, ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, то записът $F(x) + C$ обхваща всички примитивни на $f(x)$, като C е произволна константа.

Определение 2.2 Множеството от всички примитивни функции на дадена функция $f(x)$ се нарича неин **неопределен интеграл**. Означаваме $\int f(x) dx$, където:

$\int$ – знак на интеграла;

$f(x)$ – подинтегрална функция;

x – интеграционна променлива.

Записваме:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x) + C, \\ F'(x) &= f(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 Свойства на неопределения интеграл

Свойствата на неопределения интеграл се основават на зависимостта (2.1). Тя позволява да заключим, че диференцирането и интегрирането са *взаимно обратни действия* (припомняме си това, което знаем за диференциал на функция, а именно $dF(x) = F'(x) dx$):

$$F(x) + C = \int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x),$$

т.е. знаците за интеграл и диференциал се унищожават взаимно, ако се намират един след друг.

Също така,

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x).$$

Последното ни позволява да изведем интегралите на някои основни елементарни

функции:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Полезно е да добавим и две често срещани формули, а именно:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Всички тези формули обикновено наричаме **таблични интеграли**.

Първата формула, например, се прилага при всевъзможни стойности на степенния показател a . Конкретно,

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (a = 1); \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \quad (a = 2); \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \quad (a = 3) \quad \text{и т.н.,}$$

но също така

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad (a = -2); \quad \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C \quad (a = -3); \quad \int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C \quad (a = -4),$$

а освен това (примерно!)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad (a = -\frac{1}{2}); \quad \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C \quad (a = \frac{1}{3}) \quad \text{и др.}$$

Като че ли тази формула, която касае интегриране на степенна функция x^a , най-точно илюстрира философията на (може би) най-важните действия в математиката – диференциране и интегриране на функции.

Като съпоставим формулите $(x^a)' = ax^{a-1}$ и $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, правим следните изводи:

- при диференциране степенният показател намалява с една единица, а при интегриране е обратно – увеличава се с една единица;
- при диференциране имаме умножение с число (степенния показател a), а при интегриране имаме обратното действие – делим на $a+1$.

Лесно се виждат и още две, важни свойства на неопределения интеграл, които следват от Определение 2.2.

I. Ако функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са **интегрируеми** (могат да се интегрират, т.е. притежават своите примитивни функции), то

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx,$$

защото производните на двете страни на това равенство съвпадат. Това свойство се нарича **адитивност**.

II. Ако k е дадено число, то имаме **хомогенност** на интеграла при умножение с число на подинтегралната функция:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Съчетавайки тези две свойства, получаваме т. нар. **линейност** на неопределения интеграл: ако $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са интегрируеми функции, а k_1 и k_2 са числа, то

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx.$$

Пример 2.1:

$$\begin{aligned} \int \left(2 \sin x - 3x^3 + \frac{2}{x^2} \right) dx &= 2 \int \sin x dx - 3 \int x^3 dx + 2 \int x^{-2} dx \\ &= -2 \cos x - 3 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = - \left(2 \cos x + \frac{3}{4} x^4 + \frac{2}{x} \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.2:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx = x - 2 \ln |x| + \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.3:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{(x^2 + 1) + 6}{x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{6}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int 1 dx + 6 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x + 6 \arctan x + C. \end{aligned}$$

2.3 Непосредствено интегриране

Непосредственото интегриране е най-важният от практическа гледна точка аспект по отношение на неопределения интеграл. Но освен това тук е мястото да дадем отговор на резонния въпрос, който всеки при своите първи стъпки в интегрирането си задава: "Защо фигурира знакът за диференциране d в интеграла? Каква е ролята му и може ли той да липсва?" Отговорът се базира на две основни практически правила относно диференциала d .

Първото основно правило е, че под знака на диференциала можем да прибавяме произволно число:

$$dx = d(x + C).$$

Това правило се основава на факта, че $dC = 0$ където $C = \text{const}$, следователно $d(x + C) = dx + dC = dx$.

Пример 2.4:

$$\int (x + 2)^{25} dx = \int (x + 2)^{25} d(x + 2) = \frac{(x + 2)^{26}}{26} + C.$$

Пример 2.5:

$$\int \frac{dx}{3x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{3x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x - 1)}{3x - 1} = \frac{1}{3} \ln |3x - 1| + C.$$

Пример 2.6:

$$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\cos 3x + C.$$

Пример 2.7:

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

Пример 2.8:

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} d(x) = - \int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} + C.$$

Пример 2.9:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 1} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} d(x + 1) = \arctan(x + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.10:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(-x^2 + 2x - 1) + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x - 1)^2 + 1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} d(x-1) = \arcsin(x-1) + C.$$

Съгласно *второто основно правило*, преминаването на функцията зад знака на диференциала d е равносилно на интегриране, а именно:

$$\varphi'(x) dx = d\varphi(x).$$

Пример 2.11:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \int \frac{(x^2)'}{x^2 + 3} dx = \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 3} = \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \ln(x^2 + 3) + C.$$

Пример 2.12:

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{(x^2)'}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Пример 2.13:

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Пример 2.14:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{-(\cos x)'}{1 + \cos^2 x} dx = - \int \frac{d \cos x}{1 + \cos^2 x} = - \arctan(\cos x) + C.$$

Освен изложеното досега да споменем, че съществуват още само два метода (подхода) за интегриране. Те всъщност са методи за трансформиране на подинтегралния израз (подинтегрална функция и диференциал) така, че в крайна сметка да можем да приложим непосредствено интегриране. Това са **интегриране чрез смяна на интеграционната променлива** (полагане, субституция) и **интегриране по части**, които ще бъдат разгледани в следващите параграфи.

2.4 Интегриране чрез смяна на интеграционната променлива – същност и прилагане

Разглеждаме интеграла $\int f(x) dx$. Ако видът на подинтегралната функция $f(x)$ е такъв, че не позволява непосредствено интегриране, е оправдано да се опитаме да трансформираме подинтегралния израз $f(x) dx$ така, че това да стане възможно. Един от начините да постигнем това е да предприемем смяна на интеграционната променлива x .

Предполагаме, че за аргумента x съществува диференцируема функция $\varphi(t)$, която е обратима, т.е. ако

$$x = \varphi(t), \tag{2.2}$$

то

$$t = \psi(x). \quad (2.3)$$

И така, в неопределения интеграл ще извършим **смяна на интеграционната променлива** (2.2).

Използваме връзката (2.2) между досегашната променлива x и новата променлива t , за да трансформираме интеграла $\int f(x) dx$ така, че той вече да зависи само и единствено от t .

За диференциала dx получаваме: $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt$.

Заместваем x с $\varphi(t)$ и в подинтегралната функция: $f(x) = f(\varphi(t))$.

Тогава за интеграла получаваме **формула за смяна на интеграционната променлива**:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (2.4)$$

За илюстрация на метода като начало ще обобщим два от *табличните интеграли*.

Пример 2.15: Ще изведем формулата за пресмятане на $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx, a \neq 0$ въз основа на табличния интеграл $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$.

И така, нека за $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ положим $x = at$, (тогава $t = \frac{x}{a}$), откъдето изразяваме $dx = dat = adt$, а също така $a^2 + x^2 = a^2 + a^2 t^2 = a^2(1 + t^2)$.

Тогава:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{a}{a^2(1 + t^2)} dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{a} \arctan t + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

За пояснение, обръщаме внимание на факта, че при неопределения интеграл няма значение каква променлива използваме (т.е. с каква буква е означена променливата): щом $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(t) dt = F(t) + C$!

Конкретно в случая табличният интеграл, който използвахме, е

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C,$$

а тогава съответно

$$\int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + C.$$

След интегрирането полученият резултат не трябва да остава като функция от нововъведената променлива (в случая t), а се изразява чрез (връщаме се към) изходната променлива x ! Да отбележим също, че понякога това не е никак тривиално.

Пример 2.16: Ще изведем формулата за пресмятане на $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, a > 0$ като сведем към табличния интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$.

Отново полагаме $x = at$, (т.е. тогава $t = \frac{x}{a}$), откъдето получаваме $dx = dat = adt$ и $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 t^2} = \sqrt{a^2(1 - t^2)} = a\sqrt{1 - t^2}$, $a > 0$.

Тогава:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a}{a\sqrt{1 - t^2}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Забележка 2.2 Понякога е по-удобно да тръгнем не от зависимостта (2.2) (x като функция на t), а от (2.3) (t като функция на x).

Пример 2.17: $\int (2x^3 + 3)^8 x^2 dx$

Полагаме $t = 2x^3 + 3$ и тогава изразяваме диференциала: $dt = 6x^2 dx$, откъдето $x^2 dx = \frac{1}{6} dt$.

Предвид това,

$$\int (2x^3 + 3)^8 x^2 dx = \frac{1}{6} \int t^8 dt = \frac{1}{6} \left(\frac{t^9}{9} \right) + C = \frac{1}{54} (2x^3 + 3)^9 + C.$$

Забележка 2.3 При някои интеграли е по-естествено (а и по-изгодно) първо да преобразуваме подинтегралния израз, а впоследствие да сменим променливата.

Пример 2.18: $\int \frac{dx}{\sin x}$

Последователно предприемаме следните стъпки с цел преобразуване на интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} & (\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) \\ &= \int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}. & \left(\frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = d \tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

Тогава, ако означим $t = \tan \frac{x}{2}$, то

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Оттук нататък можем да използваме получените в Пример 2.15, Пример 2.16 и Пример 2.18 резултати, като ги причислим и добавим към *табличните интеграли*:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C; \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Няма универсална рецепта и генерални директиви кога и от какъв точно избран вид да се извършва смяна на интеграционната променлива. Има обаче някои установени положения и препоръчвани подходи, резултатността на които е проверена от математическата практика. С някои от тях ще се запознаем и ще приложим тук и сега, в следващите два параграфа.

2.5 Интегриране на някои ирационални функции

Едно от най-големите затруднения при интегриране се дължи на ирационалността, т.е. наличие на дробна степен в подинтегралната функция. Ще изложим някои стандартни подходи при интегриране на ирационални функции. Основен принцип е, че целта на полагането винаги е преодоляване на ирационалността на функцията.

Ако подинтегралната функция съдържа $\sqrt[k]{ax+b}$ при някое k – естествено число, където a и b са реални числа, то полагаме $ax+b = t^k$, т.е. $\sqrt[k]{ax+b} = t$.

Пример 2.19: $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}}$

Полагаме $\sqrt{1+x} = t$, откъдето $1+x = t^2$, следователно $x = t^2 - 1$.

Изразяваме също $dx = d(t^2 - 1) = (t^2 - 1)'dt = 2tdt$ и заместваем в изходния интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}} &= \int \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \frac{t+1}{t+1} dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2 \int 1 dt - 2 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln |t+1| + C = 2\sqrt{1+x} - 2 \ln (\sqrt{1+x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.20: $\int x\sqrt{2x-1} dx$

Полагаме $\sqrt{2x-1} = t$. Да изразим x посредством t . Последователно получаваме $2x-1 = t^2 \Rightarrow 2x = t^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$.

Тогава

$$dx = d\frac{1}{2}(t^2 + 1) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)'dt = \frac{1}{2}2tdt; \quad x\sqrt{2x-1} = \frac{1}{2}(t^2 + 1)t = \frac{1}{2}(t^3 + t).$$

Заместваем в интеграла:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x-1} dx &= \frac{1}{2} \int (t^3 + t)t dt = \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10} + \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.21: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

Ще положим $\sqrt[3]{x+2} = t$, откъдето $x+2 = t^3 \Rightarrow x = t^3 - 2$. Тогава $dx = d(t^3 - 2) = (t^3 - 2)'dt = 3t^2 dt$.

Заместваме в интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-1} &= \int \frac{3t^2}{t-1} dt = 3 \int \frac{t^2-1+1}{t-1} dt = 3 \int \frac{t^2-1}{t-1} dt + 3 \int \frac{dt}{t-1} \\ &= 3 \int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} dt + 3 \int \frac{d(t-1)}{t-1} = 3 \int (t+1) dt + 3 \ln |t-1| \\ &= 3 \frac{t^2}{2} + 3t + 3 \ln |t-1| + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} + 3 \sqrt[3]{x+2} + 3 \ln |\sqrt[3]{x+2}-1| + C. \end{aligned}$$

Забележка 2.4 Можем да предприемем и полагането $\sqrt[3]{x+2}-1 = s$ (s – нова променлива), което би довело до малко по-лесно непосредствено интегриране след трансформиране на интеграла.

Когато в подинтегралната функция фигурират $\sqrt[k_1]{ax+b}$, $\sqrt[k_2]{ax+b}$, $\sqrt[k_3]{ax+b}$, ... при $k_1, k_2, k_3, \dots$ – естествени числа, то полагаме $ax+b = t^k$, т.е. $\sqrt[k]{ax+b} = t$, където k е най-малкото общо кратно на числата $k_1, k_2, k_3, \dots$.

Пример 2.22: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

В подинтегралната функция участва както $\sqrt[3]{x}$, така и $\sqrt{x}$. Трябва така да подберем смяна на променливата, че $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt{x}$ да се преобразуват в рационални функции. За тази цел избираме $x = t^6$ ($t = \sqrt[6]{x}$).

Следователно $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2$ и $\sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3$.

От своя страна, $dx = dt^6 = 6t^5 dt$ и тогава

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^5}{t^2(1+t)} dt \\ &= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^3+1-1}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^3+1}{t+1} dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} \\ &= 6 \int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} dt - 6 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 6 \int (t^2-t+1) dt - 6 \ln |t+1| \\ &= 6 \frac{t^3}{3} - 6 \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln |t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln (\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

2.6 Стандартни субституции, прилагани към ирационални функции

В зависимост от участващия в подинтегралната функция ирационален израз прилагаме следните *стандартни субституции*:

- Ако в подинтегралната функция фигурира $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, то подходящо е да положим $x = a \sin t$ и тогава

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t, \quad (\cos t > 0) \\ dx &= d(a \sin t) = a \cos t dt,\end{aligned}\tag{2.5}$$

а може вместо това да изберем $x = a \cos t$ и в такъв случай

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t} = a \sin t, \quad (\sin t > 0) \\ dx &= d(a \cos t) = -a \sin t dt.\end{aligned}\tag{2.6}$$

- Ако в подинтегралната функция фигурира $\sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$, то подходящо е да положим $x = a \tan t$. При такова полагане получаваме

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}, \quad (\cos t > 0) \\ dx &= d(a \tan t) = \frac{a dt}{\cos^2 t}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

- Ако в подинтегралната функция фигурира $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$, то подходящо е да положим $x = \frac{a}{\sin t}$ и тогава

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \left(\frac{\cos t}{\sin t} > 0\right) \\ dx &= d\frac{a}{\sin t} = -\frac{a \cos t dt}{\sin^2 t}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Алтернативно, можем да положим $x = \frac{a}{\cos t}$ и в такъв случай

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \left(\frac{\sin t}{\cos t} > 0\right) \\ dx &= d\frac{a}{\cos t} = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Пример 2.23: $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

Полагаме $x = 2 \sin t$. Тогава, съгласно (2.5), $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$ и $dx = 2 \cos t dt$.

Заместваме в интеграла и получаваме

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int 4 \cos^2 t dt = 4 \int \cos^2 t dt.$$

При интегриране често намират приложение тригонометричните **формули за понижаване на степента**:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}; \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}; \sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}. \quad (2.10)$$

Като използваме първата от тези формули, получаваме

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int 4 \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \int dt + \int \cos 2t d(2t) = 2t + \sin 2t + C,$$

след което трябва да се върнем към променлива x .

Пример 2.24: $\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$

Полагаме $x = 3 \cos t$. Оттук нека предварително да изразим (ще ни трябва!)

$$\cos t = \frac{x}{3}, \quad \text{следователно} \quad \sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}.$$

Предвид (2.6), $\sqrt{(9 - x^2)^3} = 3^3 \sin^3 t$ и $dx = -3 \sin t dt$.

Тогава:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}} = \int \frac{-3 \sin t dt}{3^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin^2 t}$$

(стигнахме до интеграл, който за щастие е табличен!)

$$= \frac{1}{9} \cot t + C = \frac{1 \cos t}{9 \sin t} + C = \frac{1 \frac{x}{3}}{9 \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}} + C = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} + C.$$

Пример 2.25: $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$

Полагаме $x = 2 \tan t$.

От (2.7) имаме, че $\sqrt{(4 + x^2)^3} = \frac{2^3}{\cos^3 t}$ и $dx = 2 \frac{dt}{\cos^2 t}$. Заместваме в изходния интеграл и получаваме:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}} = \int \frac{2 \frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{2^3}{\cos^3 t}} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C.$$

За да се върнем към изходната променлива x , използваме връзката между x и t : $x = 2 \tan t$, следователно

$$\frac{x}{2} = \tan t \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \tan^2 t; \quad \frac{x^2}{4} + 1 = \tan^2 t + 1,$$

т.е. $\frac{x^2 + 4}{4} = \frac{1}{\cos^2 t}$, откъдето

$$\cos^2 t = \frac{4}{x^2 + 4}; \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{4}{x^2 + 4} = \frac{x^2}{x^2 + 4},$$

така че $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}} = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + C.$$

Пример 2.26: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$

Да положим $x = \frac{1}{\sin t}$. Предвид (2.8) имаме, че

$$\sqrt{(x^2 - 1)^3} = \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t} \quad \text{и} \quad dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt.$$

Тогава:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \int \frac{-\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}}{\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t}} = -\int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = -\frac{1}{\cos t} + C.$$

От връзката между изходната променлива x и новата променлива t получаваме:

$$\sin t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x},$$

следователно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C.$$

2.7 Интегриране по части на неопределения интеграл

Методът за **интегриране по части**, наред със смяна на интеграционната променлива, се състои в преобразуване на подинтегралната функция с цел свеждане на пресмятането на зададения интеграл към друг, по-прост и лесен по вид, подходящ за непосредствено интегриране.

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две диференцируеми функции.

Тогава в сила е **формулата за интегриране по части**:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x). \quad (2.11)$$

Тази формула лесно се получава, като използваме, че

$$d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$$

и интегрираме това равенство:

$$\int d(u(x)v(x)) = \int u(x) dv(x) + \int v(x) du(x),$$

т.е.

$$u(x)v(x) = \int u(x) dv(x) + \int v(x) du(x),$$

откъдето веднага следва (2.11).

Методът за интегриране по части се състои в прилагане (понякога нееднократно) на формула (2.11) или, което е еквивалентно, на

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Ако непосредственото прилагане на тези формули не е очевидно, се налага предварително действие, наричано *внасяне под знака на диференциала*.

Нека например пресмятаме интеграла $F(x) = \int f(x) dx$. Можем да опитаме да представим функцията $f(x)$ като произведение: $f(x) = u(x)w(x)$ така, че да са изпълнени условията:

- интегралът $v(x) = \int w(x) dx$ се пресмята лесно, т.е. ако $w(x)$ е известна функция, то $v(x) = ?$ ($v'(x) = w(x)$);
- интегралът $\int v(x)u'(x) dx$ се пресмята чрез непосредствено интегриране, или поне е по-прост по вид от първоначалния интеграл.

Пример 2.27:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{e^x}_{w(x)} dx &= \int x (e^x)' dx = \int \underbrace{x}_{u(x)} d \underbrace{e^x}_{v(x)} \\ &= \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{e^x}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)} d \underbrace{x}_{u(x)} = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$

Началният етап е *внасянето* на $w(x) = v'(x)$ под знака на диференциала, при което подинтегралният израз се преработва съгласно равенството

$$f(x) dx = u(x)w(x) dx = u(x)v'(x) dx = u(x) dv(x).$$

Няма всеобхватни принципи за това какво е най-добре да *внасяме* под знака на диференциала, но все пак полезно е да се имат предвид някои правила:

1. Приоритетно *внасяме* експоненциални и тригонометрични функции. Те лесно се *внасят*, запазват вида си след интегриране, като при това новополучените интеграли не се усложняват допълнително. Това означава във $w(x)$ да съсредоточаваме по възможност експоненти и тригонометрични функции. С други думи, ако подинтегралната функция е произведение, единият от множителите в което е експонента или тригонометричен синус/косинус, именно него *внасяме* под знака на диференциала.

2. Изразите, съдържащи логаритми и обратни тригонометрични функции (ако присъстват в интеграла!) не са никак подходящи за *внасяне* под знака на диференциала. В редица случаи това дори не е възможно. Тях *концентрираме* в $u(x)$ поради това, че след диференциране на $u(x)$ вследствие на прилагане на формулата за

интегриране по части тези изрази (диференцирани!) се преобразуват в алгебрични (и в частност рационални) изрази, при което новият получен интеграл $\int v(x)u'(x) dx$ се оказва (евентуално!) по-прост от изходния. Накратко – ако подинтегралната функция съдържа логаритмична или обратна тригонометрична функция, под диференциала внасяме всичко друго, само не и тези функции!

И така, най-подходяща за внасяне под знака на диференциала функция е експоненциалната:

$$e^{ax} dx = \frac{1}{a} de^{ax}, \quad (2.12)$$

което ще използваме в следващите два примера.

Пример 2.28: $\int x e^{2x} dx$

За да приложим формулата за интегриране по части (2.11), първо внасяме e^{2x} под знака на диференциала – прилагаме (2.12) за $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int x de^{2x} = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} - \int e^{2x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) \right] = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right] + C = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 2.29: $\int (x^2 + x) e^x dx$

Първо внасяме e^x под знака на диференциала:

$$\int (x^2 + x) e^x dx = \int (x^2 + x) de^x = (x^2 + x) e^x - \int e^x d(x^2 + x) = (x^2 + x) e^x - \int e^x (2x + 1) dx$$

(интегрирахме по части, след което $d(x^2 + x) = (x^2 + x)' dx = (2x + 1) dx$)

В интеграла $\int e^x (2x + 1) dx$, до който достигнахме, отново фигурира и e^x , и полином. Полиномът обаче е от степен, с единица по-малка от степента на полинома в изходния интеграл. Именно тук се проявява ефектът от интегрирането по части: при всяко (правилно!) прилагане на формула (2.11) степента на полинома намалява с 1. Прилагаме последователно формулата за интегриране по части толкова на брой пъти, колкото е степента на участващия полином – в случая двукратно.

И така, продължаваме пресмятането, като $\int e^x (2x + 1) dx$ интегрираме по части:

$$\int (x^2 + x) e^x dx = (x^2 + x) e^x - \int (2x + 1) de^x = (x^2 + x) e^x - \left[(2x + 1) e^x - \int e^x d(2x + 1) \right]$$

(вносохме e^x под знака на диференциала и интегрирахме по части)

$$= (x^2 - x - 1) e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 - x - 1) e^x + 2 e^x + C = (x^2 - x + 1) e^x + C.$$

(извършихме привеждане и използвахме, че $d(2x + 1) = (2x + 1)'dx = 2dx$.)

Следващите по приоритет за внасяне под знака на диференциала функции след експонентите са тригонометричните функции $\sin ax$ и $\cos ax$.

За тях използваме, че

$$\sin ax \, dx = -\frac{1}{a} d \cos ax, \quad (2.13)$$

$$\cos ax \, dx = \frac{1}{a} d \sin ax. \quad (2.14)$$

Пример 2.30: $\int x \sin 2x \, dx$

Внасяме $\sin 2x$ под знака на диференциала съгласно (2.13) при $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{2} \int x d \cos 2x = -\frac{1}{2} \left[x \cos 2x - \int \cos 2x \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) \right] = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 2.31: $\int (x^2 - 1) \cos x \, dx$

Внасяме $\cos x$ под знака на диференциала съгласно (2.14) при $a = 1$:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1) \cos x \, dx &= \int (x^2 - 1) d \sin x = (x^2 - 1) \sin x - \int \sin x d(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1) \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = (x^2 - 1) \sin x + 2 \int x d \cos x \\ (d(x^2 - 1) &= (x^2 - 1)'dx = 2x dx, \text{ внасяме } \sin x \text{ под знака на диференциала}) \\ &= (x^2 - 1) \sin x + 2 \left[x \cos x - \int \cos x \, dx \right] \\ (\text{повторно интегрираме по части}) \end{aligned}$$

$$= (x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 3) \sin x + 2x \cos x + C.$$

Пример 2.32: Ще пресметнем интегралите $I_1 = \int e^x \sin x \, dx$ и $I_2 = \int e^x \cos x \, dx$.

Нека в I_1 внесем e^x под знака на диференциала и да интегрираме по части (използваме, че $d \sin x = \cos x \, dx$):

$$I_1 = \int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Да отбележим междувременно, че току-що достигнахме до равенството

$$I_1 = e^x \sin x - I_2.$$

Продължаваме с пресмятането на I_1 . Внасяме отново e^x под знака на диференциала и повторно интегрираме по части:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x d \cos x \right] \\ &= e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right] = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I_1. \end{aligned}$$

И така, получихме следната зависимост: $I_1 = e^x (\sin x - \cos x) - I_1$. Оттук намираме $I_1 = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$, а предвид получената по-горе зависимост $I_1 = e^x \sin x - I_2$ намираме $I_2 = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$.

Окончателно

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C; \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C,$$

като константата C прибавяме съгласно дефиницията за примитивна функция.

Сега ще решим няколко интеграла, в които фигурират логаритмични и обратни тригонометрични функции. В редица подобни случаи се налага внасянето под знака на диференциала на степенна функция x^k :

$$x^k dx = \frac{1}{k+1} dx^{k+1}, \quad k \neq -1. \quad (2.15)$$

Пример 2.33: $\int x^2 \ln x dx$

Използваме (2.15) при $k = 2$, за да внесем x^2 под знака на диференциала, след което интегрираме по части:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int \ln x dx^3 = \frac{1}{3} \left[x^3 \ln x - \int x^3 d \ln x \right] = \frac{1}{3} \left[x^3 \ln x - \int x^2 dx \right]$$

(тук използвахме, че $d \ln x = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$)

$$= \frac{1}{3} \left[x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} \right] + C = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C.$$

Пример 2.34: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Интегралът е аналогичен на този от Пример 2.33, т.е. е от типа $\int x^k \ln x dx$, като в случая $k = -2$.

Тогава използваме (2.15) при $k = -2$, внасяме $\frac{1}{x^2}$ под знака на диференциала $\left(\frac{dx}{x^2} = -d \frac{1}{x} \right)$ и интегрираме по части:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= - \int \ln x d\frac{1}{x} = - \left[\frac{1}{x} \ln x - \int \frac{1}{x} d \ln x \right] \\ &= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.\end{aligned}$$

Пример 2.35: $\int x \arctan x dx$

Тук, разбира се, под знака на диференциала ще внесем x , а не $\arctan x$:

$$x dx = \frac{1}{2} dx^2.$$

Тогава получаваме:

$$\begin{aligned}\int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int x^2 d \arctan x \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \right] = \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \right]\end{aligned}$$

(защото $d \arctan x = (\arctan x)' dx = \frac{dx}{x^2 + 1}$)

$$= \frac{1}{2} \left[x^2 \arctan x - \int dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C.$$

При някои интеграли съчетаването на смяна на променливата и интегриране по части е успешна стратегия. Тази практика не само дава елегантни, ясни и лесни за осмисляне решения, но и предпазва от редица технически и концептуални трудности и вследствие на тях грешки, които могат да бъдат допуснати в хода на решаването.

Пример 2.36: $\int x \ln(x^2 + 1) dx$

Внасяме x под знака на диференциала и прибавяме единица:

$$x dx = \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2} d(x^2 + 1).$$

Тогава:

$$\int x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int \ln(x^2 + 1) d(x^2 + 1).$$

При такова представяне на интеграла изглежда разумно да положим $x^2 + 1 = t$. Полученият интеграл, без предприемане на никакви допълнителни действия, директно интегрираме по части:

$$\int x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int \ln t dt = \frac{1}{2} \left(t \ln t - \int t d \ln t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(t \ln t - \int t(\ln t)' dt \right) = \frac{1}{2} \left(t \ln t - \int dt \right) = \frac{1}{2} (t \ln t - t) + C \\
&= \frac{t}{2} (\ln t - 1) + C = \frac{x^2 + 1}{2} (\ln(x^2 + 1) - 1) + C.
\end{aligned}$$

Пример 2.37: $\int \arctan \sqrt{x} dx$

Тук има смисъл да положим $\sqrt{x} = t$, т.е. $x = t^2$:

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = \int \arctan t dt^2.$$

Интеграла, до който достигнахме след смяната на променливата, би трябвало сега директно да интегрираме по части, да получим резултата и да се върнем към променлива x . Можем обаче да забележим, че точно такъв интеграл вече сме решили в Пример 2.35 и да го използваме. Действително, тъй като $dt^2 = 2t dt$, то

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = 2 \int t \arctan t dt,$$

а в Пример 2.35 получихме, че

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C.$$

Следователно

$$\begin{aligned}
\int \arctan \sqrt{x} dx &= 2 \frac{1}{2} (t^2 \arctan t - t + \arctan t) + C \\
&= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C = (x + 1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Съществуват някои частни случаи, при които методът за интегриране по части е приложим и ефективен. Такива са например интегралите от вида

$$\int u(x) dx,$$

където $u(x)$ е логаритмична или обратна тригонометрична функция. В тези случаи директно прилагаме формулата за интегриране по части (2.11), като приемаме $v(x) \equiv 1$:

$$\int u(x) dx = xu(x) - \int x du(x) = xu(x) - \int xu'(x) dx.$$

Ще илюстрираме това в следващия пример.

Пример 2.38: $\int \ln(x^2 + 1) dx$

Директно интегрираме по части:

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) - \int x d \ln(x^2 + 1).$$

Тъй като

$$d \ln(x^2 + 1) = (\ln(x^2 + 1))' dx = \frac{2x}{x^2 + 1} dx,$$

то получаваме:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Задачи за упражнение:

2.1. Решете $\int \arcsin x dx$ по подобие на Пример 2.38.

2.2. Решете $\int \frac{x}{e^x} dx$, като приложите (2.12) за $a = -1$.

2.3. Решете $\int \ln \sqrt{1-x} dx$, като положите $\sqrt{1-x} = t$, т.е. $x = 1-t^2$ и интегрирате по части.

Глава 3

Определен интеграл

3.1 Определен интеграл – въвеждане като понятие и определение

Към понятието *определен интеграл* се свеждат най-разнообразни задачи, които възникват в практиката.

Нека например първоначално да разгледаме следната задача: дадена е функция $y = f(x)$, която е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна поне в крайния и затворен интервал $[a, b]$; търсим лицето S на тази фигура (*криволинеен трапец*), която е ограничена от оста Ox , графиката на $y = f(x)$ и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$.

Разделяме интервала $[a, b]$ на n *подинтервала* $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ посредством точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (\text{Фиг. 3.1}).$$

Да означим дължините на $[x_{i-1}, x_i]$ с $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

През точките x_i построяваме прави, успоредни на оста Oy . По този начин сме разбили криволинейния трапец на n на брой криволинейни трапеца (Фиг. 3.1).

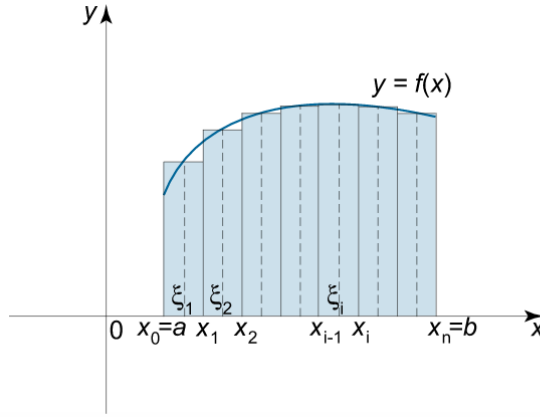
Нека във всеки от подинтервалите изберем по една произволна точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. В точките ξ_i $i = 1, 2, \dots, n$ построяваме прави, успоредни на оста Oy до пресичането им с графиката на функцията $y = f(x)$; отрезите на тези прави (ординатите на точките на пресичане с графиката на функцията) са съответно $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ (Фиг. 1).

Върху всеки подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$ построяваме правоъгълник с височина $f(\xi_i)$ и в резултат получаваме стъпаловидна фигура (свкупност от n правоъгълника).

Лицето S_n на тази стъпаловидна фигура очевидно е:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (3.1)$$

Сумата S_n е приближение на лицето S на криволинейния трапец. Интуитивно е ясно, че колкото по-голям е броят n на подинтервалите (а оттам колкото по-малки са техните дължини), толкова по-точно би било това приближение.



Фигура 3.1: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$

Правим извода, че S представлява граница на S_n при неограничено нарастване на n (т. е. $n \rightarrow \infty$), ако е изпълнено, че

$$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

И така, предвид (3.1),

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (3.3)$$

стига да е в сила условието (3.2).

Решаването на други конкретни задачи (пресмятане на работа на променлива сила, на изминат път по зададена променлива скорост, на линейна маса по зададена променлива плътност и т.н.) се свежда до действия, напълно идентични с току-що предприетите. Това по естествен начин налага да се направи строга математическа обосновка и прецизиране на изложения по-горе похват.

Най-общо, ако е дадена функция $y = f(x)$, дефинирана и непрекъсната поне в краен интервал $[a, b]$, предприемаме следните стъпки:

1. Разбиваме интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ с дължини съответно $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ посредством точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. Избираме точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ по произволен начин и образуваме произведенията

$$f(\xi_i) \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

3. Съставяме сумата I_n от тези произведения:

$$I_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i; \quad (3.4)$$

4. Намираме границата I на I_n при $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ (т.е. при $n \rightarrow \infty$):

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

I се нарича *определен интеграл* от функция $f(x)$ в граници от a до b и се означава по следния начин:

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

следователно

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Сумата I_n , дефинирана в (3.4), се нарича **интегрална сума на Риман**.

Определение 3.1 Границата на интегралната сума на Риман I_n при $n \rightarrow \infty$ се нарича **определен интеграл** и се означава с $\int_a^b f(x) dx$, където:

- $\int$ – знак на интеграла;
- $f(x)$ – подинтегрална функция;
- x – интеграционна променлива;
- a – долна интеграционна граница;
- b – горна интеграционна граница.

Забележка 3.1 От начина на въвеждане на определения интеграл е видно, че той е число. Стойността му зависи само от вида на подинтегралната функция $f(x)$ и от числата a и b , определящи **интеграционния интервал** $[a, b]$. Променливата x служи само за удобно означение; нищо не би се променило, ако интеграционната променлива означим с друга буква:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds.$$

Външната прилика в означенията на определения и неопределения интеграл подсказва, че те са тясно свързани, въпреки че определеният интеграл е число, а неопределеният – съвкупност от примитивни функции. Връзката между тях ще установим малко по-късно. Засега ще споменем само, че благодарение на нея определен интеграл се пресмята посредством съответстващ му неопределен интеграл, а не чрез граничен преход на съставена интегрална сума съгласно (3.4) – този процес изисква преодоляване на съществени трудности дори и в най-простите наглед случаи.

Да отбележим само съвсем очевидния факт, че

$$\int_a^b dx = b - a,$$

който следва от това, че всяка интегрална сума (при всеки избор на точките ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$) е равна на $b - a$ при $f(x) \equiv 1$:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Определение 3.2 Казваме, че функцията $f(x)$ е **интегрируема** в интервала $[a, b]$, когато $\int_a^b f(x) dx$ съществува.

Отговорът на въпроса за какви функции определения интеграл съществува се дава от следната теорема:

Теорема 3.1 Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ съществува.

Оттук нататък разглежданите функции ще считаме за непрекъснати по подразбиране, освен ако специално не е указано противното.

3.2 Свойства на определения интеграл

Първите две свойства на определения интеграл са аналогични на тези при неопределения. Те характеризират подинтегралната функция.

I. Адитивност (относно подинтегралната функция):

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

II. Хомогенност на интеграла при умножение на подинтегралната функция с число k :

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Тези две свойства, както и останалите, са пряко следствие от Определение 3.1. Следващите две свойства визират интеграционните граници.

III. Размяна на интеграционните граници:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Като следствие от това свойство, ако $a \equiv b$, то получаваме $\int_a^a f(x) dx = 0$.

IV. Адитивност (относно интеграционния интервал): ако $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Забележка 3.2 *Всъщност, това свойство остава в сила при произволна подредба на точките върху числовата ос.*

V. Знак на интеграла: Ако функцията $f(x)$ има постоянен знак в $[a, b]$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{при} \quad f(x) \geq 0;$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{при} \quad f(x) \leq 0.$$

VI. Интегриране на неравенства: Ако $\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$ ($a < b$), то

$$\int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi_2(x) dx.$$

VII. Оценка на интеграла: Ако m и M са съответно долна и горна граница на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ ($a < b$), т.е. $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Забележка 3.3 *Оттук като следствие се получава важно за математическия анализ свойство за **абсолютна интегрируемост**, което гласи: ако функцията $f(x)$ е интегрируема в интервала $[a, b]$, то $|f(x)|$ също е интегрируема в $[a, b]$, при което*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

VIII. Теорема за средната стойност: съществува поне една точка $\xi \in [a, b]$ такава, че

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Величината $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ е **средна стойност** на $f(x)$ в интервала $[a, b]$, която, съгласно това свойство, се достига в някоя точка $\xi \in [a, b]$.

Средна стойност на краен брой величини е тяхното *средноаритметично*; когато обаче се касае за стойности на непрекъсната величина в даден интервал (които са безброй много!), усредняване се извършва посредством интегриране (което е аналог на сумирането при средноаритметично) и разделяне на дължината на интервала (която е аналог на броя на сумираните величини).

Средната стойност на функция е понятие, което често се използва в техниката. Много величини се характеризират и проследяват именно чрез своите средни стойности: налягане на флуид; мощност на променлив ток; скорост на химична реакция и т.н.

3.3 Диференциране на интеграла по горна граница. Формула на Нютон-Лайбниц

Нека разгледаме интеграл, долната интеграционна граница на който е постоянна, а горната е променлива величина:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (3.5)$$

При различни стойности на горната граница x стойността на интеграла $I(x)$ се променя, т.е. интегралът е функция от горната си граница.

Да уточним, че свойствата на определения интеграл, изложени в предходния параграф, остават валидни и за интеграла с променлива горна граница (3.5).

В следващата теорема се изяснява един важен въпрос, а именно каква е връзката между функцията $I(x)$ и подинтервалната функция $f(x)$.

Теорема 3.2 *Интегралът с променлива горна граница (3.5) е примитивна функция на своята подинтегрална функция:*

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (3.6)$$

Доказателство. Ако в (3.5) на променливата x дадем някакво малко изменение Δx , то получаваме:

$$I(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Разглеждаме диференчното частно на функцията $I(x)$:

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right].$$

Към полученото прилагаме свойство **IV** (адитивност):

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Съгласно *Теорема за средната стойност* (свойство **VIII**) съществува точка ξ , намираща се между x и $x + \Delta x$ (по-точно, $\xi \in [x, x + \Delta x]$ при $\Delta x > 0$; $\xi \in [x + \Delta x, x]$ при $\Delta x < 0$) и такава, че

$$f(\xi) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Следователно

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = f(\xi). \quad (3.7)$$

Тук е моментът да припомним, че по дефиниция производната на функция е граница на диференчното частно:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}.$$

Да отбележим също, че ако $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x$; освен това тогава и $\xi \rightarrow x$ (защото ξ се намира между x и $x + \Delta x \rightarrow x$!).

Тогава, след граничен преход на равенство (3.7) получаваме:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x),$$

което всъщност трябваше да докажем. ■

Следващата теорема предоставя средство за пресмятане на определен интеграл посредством свеждане към неопределен.

Теорема 3.3 *Стойността на определения интеграл е равна на разликата от стойностите на коя да е примитивна $F(x)$ на подинтегралната функция в интеграционните граници:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{където } F'(x) = f(x). \quad (3.8)$$

Формула (3.8) се нарича **формула на Нютон-Лайбниц**.

Доказателство. Нека $F(x)$ е примитивна на подинтегралната функция. Предвид Теорема 3.2, друга примитивна на $f(x)$ е функцията

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Тогава $I(x)$ е от вида $F(x) + C$, следователно $I(x) = F(x) + C_1$, където C_1 е някакво конкретно число, което сега ще намерим.

Тъй като $I(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, то $I(a) = F(a) + C_1$, следователно $C_1 = -F(a)$.

И така,

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a),$$

откъдето, замествайки $x = b$, получаваме

$$I(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

■

Често се използва следният запис: $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

При това означение формулата на Нютон-Лайбниц (3.8) добива вида:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b, \quad \text{където } F'(x) = f(x). \quad (3.9)$$

3.4 Пресмятане на определен интеграл с помощта на формулата на Нютон-Лайбниц

Както стана ясно в предходния параграф, ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, т.е. ако

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Това означава, че за да пресметнем определен интеграл, трябва да намерим примитивна на подинтегралната функция (т.е. да решим съответния неопределен интеграл), след което да пресметнем разлика от нейните стойности в горната и долна интеграционна граница.

Пример 3.1

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \int_0^1 x^3 dx - 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 dx$$

(използвахме свойства **I** и **II**)

$$\left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 - 3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - (1 - 0) + 2(1 - 0) = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

(интегрираме и прилагаме формулата на Нютон-Лайбниц (3.9))

Пример 3.2

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right|_1^2 = \left. \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right|_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1) = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

(използваме табличния интеграл $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ за $n = \frac{1}{2}$ и прилагаме формулата на Нютон-Лайбниц (3.9))

Пример 3.3

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln |x-1| \Big|_2^3 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_0 = \ln 2.$$

(прибавяме под знака на диференциала -1 , за да сведем към табличния интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$, след което прилагаме формулата на Нютон-Лайбниц (3.9))

Пример 3.4

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} d(2x) = \left. \frac{1}{2} e^{2x} \right|_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - \underbrace{e^0}_1) = \frac{1}{2} (e^2 - 1).$$

(използваме, че $dx = \frac{1}{2}d(2x)$, за да сведем към интеграл от вида $\int e^x dx = e^x + C$)

Пример 3.5 $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

Първо се налага да разгледаме детайлно подинтегралната функция:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 2x + 1} &= \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \quad !!! \\ &= \begin{cases} 1-x, & x < 1, \\ x-1, & x \geq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Функцията има различен аналитичен запис в зависимост от това, дали $x < 1$, или $x \geq 1$. Това налага да разделим интеграционния интервал на два подинтервала в зависимост от представянето на подинтегралната функция, т.е. да използваме свойство **IV** (адитивност):

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx &= \int_0^2 |x-1| dx \\ &= \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1.\end{aligned}$$

(сега вече интегрираме и използваме формула (3.9))

Пример 3.6 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

Както в предходната задача, така и тук се налага да прецизираме въпроса с аналитичния вид на подинтегралната функция:

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \begin{cases} -\sin x, & \sin x < 0, \\ \sin x, & \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Конкретно в интеграционния интервал $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \begin{cases} -\sin x, & x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right], \\ \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Тогава, използвайки и този път свойство **IV** (адитивност), получаваме:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0 - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\cos 0}_1 - \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 - \underbrace{\cos 0}_1 \right) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3.7

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \, dx$$

(използваме тригонометричната формула $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ за $\alpha = x$)

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4x) \, dx$$

(използваме тригонометричната формула $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ за $\alpha = 2x$)

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \, dx = \frac{1}{8} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \, d(4x)$$

(използвахме свойства **I** и **II**)

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - \frac{1}{32} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{32} (\underbrace{\sin \pi}_0 - \underbrace{\sin 0}_0) = \frac{\pi}{32}.$$

Пример 3.8

$$\int_{-1}^0 x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{x^2} \, dx^2$$

(вносяме x под знака на диференциала и получаваме интеграл, който е от същия вид като $\int e^x \, dx = e^x + C$)

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} (e^0 - e^1) = \frac{1}{2} (1 - e).$$

Нека да обърнем внимание на следния факт (свойство **V** – *знак на интеграла*): подинтегралната функция $x e^{x^2}$ е отрицателна в интеграционния интервал $[-1, 0]$, следователно предварително е ясно, че стойността на интеграла също е отрицателна (както и получихме).

Пример 3.9

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, d(\cos x) \\ &= - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = - \frac{1}{3} (\underbrace{\cos^3 \frac{\pi}{2}}_0 - \underbrace{\cos^3 0}_1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Внасяме $\sin x$ под знака на диференциала и получаваме интеграл, който е от вида

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

3.5 Интегриране по части в определения интеграл

Най-важният резултат в интегралното смятане, който дава *връзката* между определения и неопределения интеграл и по този начин е мощно средство за *пресмятане* на определен интеграл, е формулата на Нютон-Лайбниц

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b, \quad (3.10)$$

където $F'(x) = f(x)$, т.е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (3.11)$$

Предвид (3.11) (C е произволно число), формулата на Лайбниц-Нютон (3.10) може да се запише във вида:

$$\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b. \quad (3.12)$$

Най-простите свойства – за интегриране на сбор от функции и на функция, умножена с число – са напълно аналогични за определен и за неопределен интеграл.

Сега ще разгледаме как стоят нещата при интегриране по части. Да напомним, че за неопределен интеграл формулата за интегриране по части гласи:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \quad (3.13)$$

където $u(x)$ и $v(x)$ са диференцируеми функции.

Разглеждаме съответния определен интеграл $\int_a^b u(x)dv(x)$.

Съгласно (3.12) имаме:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \int u(x)dv(x) \Big|_a^b.$$

Като приложим (3.13), оттук получаваме:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)dv(x) &= \left[u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \right] \Big|_a^b \\ &= u(x)v(x)|_a^b - \int v(x)du(x) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Тъй като съгласно (3.12)

$$\int v(x) du(x) \Big|_a^b = \int_a^b v(x) du(x),$$

то окончателно стигаме до

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x), \quad (3.14)$$

което е именно **формулата за интегриране по части в определения интеграл**.

Нека да сравним формулите за интегриране по части в неопределения и определения интеграл (съответно (3.13) и (3.14)). Може да се направи изводът, че в определения интеграл интегриране по части се провежда по същия начин, както в неопределения. Разликата се заключава в това, че при определения интеграл всичко се пресмята в интеграционни граници.

Пример 3.10

$$\int_0^1 x e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int_0^1 x d e^{5x} = \frac{1}{5} \left[x e^{5x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{5x} dx \right]$$

(внасяме e^{5x} под знака на диференциала и прилагаме формулата за интегриране по части (3.14))

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} x e^{5x} \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \int_0^1 e^{5x} d5x = \frac{1}{5} (e^5 - 0) - \frac{1}{25} e^{5x} \Big|_0^1 \\ &= \frac{e^5}{5} - \frac{1}{25} (e^5 - \underbrace{e^0}_1) = \frac{4e^5 - 1}{25}. \end{aligned}$$

Пример 3.11

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} x d \sin x = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

(внасяме $\cos x$ под знака на диференциала и интегрираме по части)

$$= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - 0 + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - \underbrace{\cos 0}_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(използваме табличния интеграл $\int \sin x dx = -\cos x + C$ и пресмятаме в интеграционни граници)

Пример 3.12

$$\int_0^1 \underbrace{\ln(x^2 + 1)}_{u(x)} d \underbrace{x}_{v(x)} = x \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \ln(x^2 + 1)$$

(интегрирахме по части – приложихме формула (3.14))

$$= \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx$$

(използвахме, че $d \ln(x^2 + 1) = (\ln(x^2 + 1))' dx = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$)

$$\begin{aligned} &= \ln 2 - 2 \int_0^1 dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \ln 2 - 2x|_0^1 + 2 \arctan x|_0^1 \\ &= \ln 2 - 2(1 - 0) + 2(\underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\arctan 0}_0) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 3.13

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d \arctan x$$

(вносяме x под знака на диференциала и интегрираме по части)

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \underbrace{\arctan 0}_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

(използвахме, че $d \arctan x = (\arctan x)' dx = \frac{dx}{x^2 + 1}$)

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

(сведохме до табличните интегралы $\int dx = x + C$ и $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C$)

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - 0) + \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

3.6 Смяна на интеграционната променлива в определения интеграл

В сравнение с метода за интегриране по части, смяната на интеграционната променлива в определения интеграл изисква повече внимание.

Да припомним, че при неопределения интеграл, ако $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.15)$$

При това, ако е известен единият от интегралите в (3.15), то известен е и другият. Ако

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Ако обаче е известен вторият от интегралите в (3.15): $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C$, то за да пресметнем $\int f(x) dx$, трябва да изразим t посредством x и да го заместим във $\Phi(t)$.

С други думи, трябва да се върнем към първоначалната променлива x : от $x = \varphi(t)$ намираме $t = \psi(x)$ (функцията ψ е обратна на функцията φ !) и тогава

$$\int f(x) dx = \Phi(\psi(x)) + C.$$

Що се касае до определения интеграл, можем да формулираме и докажем следната теорема:

Теорема 3.4 Ако α и β са такива числа, че $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и функциите $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $f(\varphi(t))$ са непрекъснати в интервала $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (3.16)$$

Доказателство. Нека $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, т.е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Съгласно изложеното по-горе,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C,$$

следователно

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Но от условието на теоремата $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(\alpha) = a$, така че

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(b) - F(a),$$

откъдето получаваме равенство (3.16). ■

От (3.16) се вижда, че при смяна на променливата в определения интеграл подинтегралният израз $f(x) dx$ се преобразува по същия начин, както при неопределения интеграл.

Трябва обаче да се пресметнат новите интеграционни граници. Те са корени съответно на уравненията $\varphi(t) = a$ и $\varphi(t) = b$. Тогава, след смяна на променливата и неопределено интегриране, можем веднага да приложим формулата на Нютон-Лайбниц (3.10) към получения резултат, като заместяваме t с неговата горна и долна граница (β и α).

Пример 3.14 $\int_0^3 x \sqrt[3]{3x-1} dx$

Ще направим смяна на променливата $\sqrt[3]{3x-1} = t$, следователно $x = \frac{t^3+1}{3}$.

Да изразим dx посредством новата променлива:

$$dx = d \frac{t^3+1}{3} = \left(\frac{t^3+1}{3} \right)' dt = t^2 dt.$$

Пресмятаме новите интеграционни граници: ако $x = 0$, то $t = \sqrt[3]{3 \cdot 0 - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1$; ако $x = 3$, то $t = \sqrt[3]{3 \cdot 3 - 1} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Тогава, съгласно формула (3.16),

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \sqrt[3]{3x-1} dx &= \int_{-1}^2 \frac{t^3+1}{3} t t^2 dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (t^6 + t^3) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2^7}{7} + \frac{2^4}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{(-1)^7}{7} + \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{128}{7} + \frac{15}{4} \right) = \frac{207}{28}. \end{aligned}$$

Пример 3.15 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Да положим $x = 2\sin t$.

Първо ще пресметнем новите интеграционни граници α и β : α е решение на уравнението $2\sin t = 0$ (при $x = 0$), а β – на уравнението $2\sin t = 2$ (при $x = 2$).

Можем тогава да вземем $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, защото при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ получаваме, че $x = 2\sin t$ пробягва целия интеграционен интервал $[0, 2]$.

Изразяваме подинтегралния израз посредством новата променлива t :

$$dx = d(2\sin t) = (2\sin t)' dt = 2\cos t dt,$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2 |\cos t| = 2 \cos t,$$

тъй като $\cos t \geq 0$ за $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

И така, тогава

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

(приложихме формулата за понижаване на степента $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$)

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \underbrace{\sin \pi}_0 - \underbrace{\sin 0}_0 = \pi.$$

Пример 3.16 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Да положим $x = \cos t$.

Новите интеграционни граници α и β ще получим съответно от уравнения: $\cos t = 0$ и $\cos t = \frac{1}{2}$.

Можем тогава да вземем $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, защото когато t обхожда стойностите, заключени между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$, $x = \cos t$ пробягва целия интеграционен интервал $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Да обърнем внимание, че $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, а същевременно $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$ (долната граница е по-голяма от горната, но в това няма нищо притеснително благодарение на свойствата на определения интеграл).

Изразяваме подинтегралния израз посредством новата променлива t :

$$dx = d(\cos t) = (\cos t)' dt = -\sin t dt,$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t,$$

защото $\sin t \geq 0$ за стойности на t , заключени между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Предвид всичко дотук, пресмятаме

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} (-\sin t) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \end{aligned}$$

(приложихме свойството за размяна на интеграционните граници, след което формулата за понижаване на степента $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \left(\underbrace{\sin \pi}_0 - \underbrace{\sin \frac{2\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Прилагайки смяна на интеграционната променлива ще изведем и две формули, които се отнасят до интегриране на четна и на нечетна функция в интервал от вида $[-a, a]$, симетричен относно нулата. Разглежданията за четна и нечетна функция ще проведем паралелно.

Нека $f(x)$ е четна/нечетна функция, т.е. за всяко x от нейната дефиниционна област

$$f(-x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \text{ е четна;} \\ -f(x), & f(x) \text{ е нечетна.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Разглеждаме интеграла

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

съгласно свойството *адитивност* относно интеграционни граници.

Нека сега в интеграла $\int_{-a}^0 f(x) dx$ да направим смяна на интеграционната променлива $x = -s$ (и следователно $dx = -ds$).

Що се отнася до интеграционните граници за новата променлива s , то при $x = -a$ имаме $s = a$, а когато $x = 0$, $s = 0$.

Тогава, след смяна на променливата и прилагане на свойството за размяна на интеграционните граници, предвид (3.17) получаваме:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-s) ds = \int_0^a f(-s) ds = \begin{cases} \int_0^a f(s) ds, & \text{четна функция,} \\ - \int_0^a f(s) ds, & \text{нечетна функция.} \end{cases}$$

Както знаем от предходния параграф, интегралът не зависи от променливата си, а само от подинтегралната функция и интеграционните си граници, т.е.

$$\int_0^a f(s) ds = \int_0^a f(x) dx,$$

следователно

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx, & \text{ако } f(x) \text{ е четна;} \\ - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx, & \text{ако } f(x) \text{ е нечетна,} \end{cases}$$

т.е. получихме, че:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \text{ако } f(x) \text{ е четна;}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad \text{ако } f(x) \text{ е нечетна.}$$

Тези две формули имат голямо приложение в инженерните пресмятания.

3.7 Несобствен интеграл

Ще разширим понятието *определен интеграл* поради съображения, които произтичат както от теорията, така и от приложенията му.

Досега за определения интеграл $\int_a^b f(x) dx$ се предполагаше, че:

1. Интеграционният интервал $[a, b]$ е краен, т.е. интеграционните граници a и b са крайни (реални) числа;
2. Подинтегралната функция $f(x)$ е ограничена в интеграционния интервал $[a, b]$.

Ако поне едно от тези две условия не е изпълнено, то интегралът се нарича **несобствен**.

7.1. Интеграл върху безкраен интервал

Нека функцията $f(x)$ е интегрируема за $x \in [a, b]$, при всяко b такова, че $b > a$.

Тогава *несобствен интеграл* от функцията $f(x)$ в *безкрайния* интервал $[a, +\infty)$ се дефинира като границата:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Ако тази граница съществува и е крайно число, то интегралът се нарича **сходящ**, а числото е неговата стойност. В противен случай той е **разходящ**.

Аналогично дефинираме и интегралите

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Тъй като несобственият интеграл е разширение на понятието определен интеграл, то за него са в сила правила за интегриране, подобни на тези за определен интеграл.

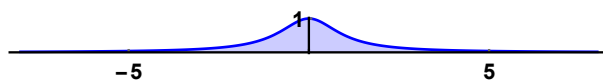
Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала $[a, +\infty)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, и ако $F(x)$ има граница при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x)|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(a)).$$

Пример 3.17 (*основен*) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Първо пресмятаме, че

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1.$$



Фигура 3.2: $y = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b.$$

Имаме следните три случая:

1. $\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ и интегралът е *сходящ*;
2. $\alpha < 1 \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, т.е. интегралът е *разходящ*;
3. $\alpha = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$ и интегралът отново е *разходящ*.

Пример 3.18

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

(използвахме, че интегрираме четна функция в симетричен относно 0 интервал)

$$= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Съгласно дефиницията на определен интеграл, интегралът $\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{1+x^2}$ е равен на лицето на фигурата, заключена между графиката на подинтегралната функция и абсцисната ос при $x \in [-b, b]$.

От своя страна, както е показано на Фигура 3.2, интегралът $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ е равен на лицето на неограничената фигура, заградена от графиката на подинтегралната функция и абсцисната ос ($-\infty < x < +\infty$). Въпреки, че фигурата е безкрайна, нейното лице е крайно число.

Тук трябва да подчертаем, че ако съществува границата $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx$, то тя се нарича **главна стойност** или **v.p.** (valeur principale (фр.), principle value (англ.)) на несобствения интеграл. Тази стойност може да съществува дори и съответният интеграл да е разходящ.

Така например, ако $f(x)$ е нечетна функция, то $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$ за всяко число b . При $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ обаче съответният интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \neq 0$ е разходящ.

Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ се нарича **абсолютно сходящ**, когато е сходящ несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Теорема 3.5 Ако един несобствен интеграл е абсолютно сходящ, то той е сходящ. Обратно в общия случай не е в сила.

В сила е и следната теорема на Вайерштрас (**принцип за сравняване**):

Теорема 3.6 Ако за $x > a$ е изпълнено, че $|f(x)| \leq \varphi(x)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ също е сходящ, при това абсолютно.

Ако пак за $x > a$ имаме $0 < \varphi(x) < f(x)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ е разходящ, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ е разходящ.

Важно е да отбележим също, че

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

е необходимо условие за сходимост на интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пример 3.19 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Ще покажем, че този интеграл е сходящ, като го сравним с друг интеграл съгласно Теорема 3.6.

Очевидно при $x \in [1, +\infty)$

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x^2} \quad (\text{защото } \sqrt{1+x^2} > x).$$

При това

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Тогава, щом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ е сходящ, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ също е сходящ (и то абсолютно!).

Несобствен интеграл, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича **условно сходящ**.

Абсолютно сходящите несобствени интеграли не се различават от стандартните определени интеграли в основните си свойства. Условно сходящите несобствени интеграли обаче са специфични и заемат отделно място в рамките на общата теория на интегралното смятане.

7.2. Интеграл от неограничена функция

Нека в крайния интервал $[a, b]$ да съществува точка c , в която подинтегралната функция $f(x)$ да има прекъсване от втори род (с *безкраен скок*), т.е. в точката c лявата и/или дясната граница е безкрайна величина. Тогава интегралът $\int_a^b f(x) dx$ също се нарича **несобствен** и се дефинира като:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

ако тези две граници съществуват и са крайни числа. Тогава интегралът се нарича **сходящ**, а в противен случай той е **разходящ**.

Очевидно ако $c = a$ или $c = b$, то $(\varepsilon > 0)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

и съответно

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Пример 3.20 (*основен*) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$

Пресмятаме, че

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}), \quad \alpha \neq 1,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln x|_\varepsilon^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon.$$

Имаме следните случаи

1. $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ и интегралът е *сходящ*;
2. $\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\alpha} = +\infty$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = -\infty$, т.е. интегралът е *разходящ*;
3. $\alpha = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = +\infty$ и интегралът отново е *разходящ*.

Като използваме полученото в този пример, можем да пресметнем и сравнително по-общите (основни) интеграли, които разглеждаме в следващите два примера ($a < b$).

Пример 3.21 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$

Когато $\alpha < 0$, случаят е тривиален, тъй като подинтегралната функция е ограничена в интеграционния интервал $[a, b]$. Така че се съсредоточаваме върху случая $\alpha > 0$.

Полагаме $\frac{x-a}{b-a} = t$, след което получаваме

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int_0^1 \frac{(b-a) dt}{t^\alpha (b-a)^\alpha} = (b-a)^{(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha},$$

така че интегралът е сведен до Пример 3.20.

Пример 3.22 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$

Аналогично на Пример 3.21, има смисъл да разглеждаме само случая $\alpha > 0$.

Полагаме $\frac{b-x}{b-a} = t$ и получаваме

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \int_1^0 \frac{(b-a) dt}{t^\alpha (b-a)^\alpha} = (b-a)^{(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha},$$

след което отново се прилага резултатът от Пример 3.20.

Задачи за упражнение: Да се пресметнат следните несобствени интеграли

$$3.1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{4}$$

$$3.3. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad \text{Отг. разходящ}$$

$$3.2. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{1}{2}$$

$$3.4. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad \text{Отг. 6}$$

3.8 Някои геометрични приложения на определения интеграл

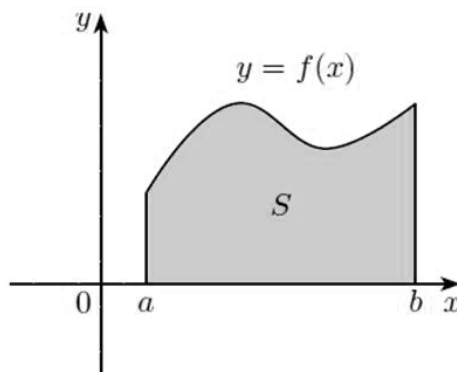
3.8.1. Лица на равнинни фигури в Декартова координатна система

Първо ще се спрем на най-лесния (и основен) случай. Нека $f(x)$ е функция, която е непрекъсната и неотрицателна в интервала $[a, b]$.

Множеството от точки

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

ограничено от графиката на функцията $f(x)$, абсцисната ос и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$, се нарича **криволинеен трапец** (Фиг. 3.3).



Фигура 3.3: $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$

Както вече е известно от дефиницията на определения интеграл, лицето S на този криволинеен трапец е

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.18)$$

Забележка 3.4 Тук е мястото да обвърнем внимание, че ако $f(x) \leq 0$ за $x \in [a, b]$, то криволинейният трапец, ограничен от графиката на функцията $f(x)$, абсцисната ос и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$, е

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}.$$

Лицето му се пресмята по формулата

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (3.19)$$

Следователно, при пресмятане на лице (което е положително число!) всяка смяна на знака на функцията в разглеждания интервал трябва да се отчита.

Пример 3.23 Да се пресметне лицето на фигурата, заградена от графиката на функцията $y = 4 - x^2$ и абсцисната ос при:

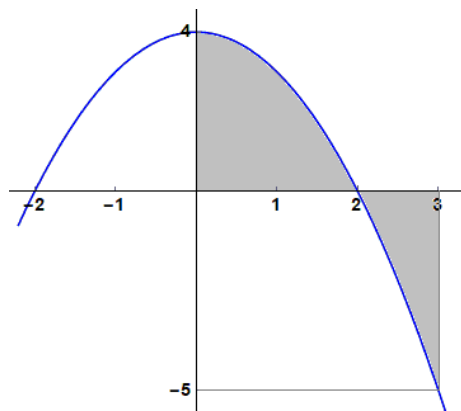
- а) $0 \leq x \leq 2$; б) $2 \leq x \leq 3$; в) $0 \leq x \leq 3$.

Първо ще определим знака на функцията в зависимост от стойностите на променливата x .

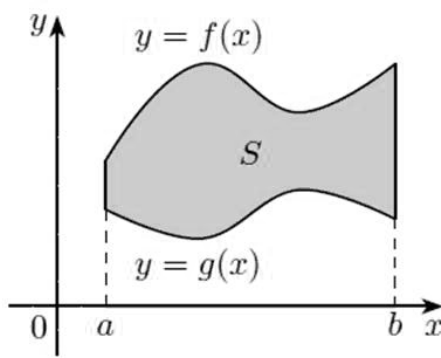
Графиката на функцията е парабола с нули $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Върхът на параболата е при $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$, следователно е точката с координати $(0, 4)$. На Фиг. 3.4 е представена тази част от графиката на $y = 4 - x^2$, която ни интересува.

а) Тъй като в интервала $[0, 2]$ графиката на функцията $y = 4 - x^2$ е над абсцисната ос (Фиг. 3.4), то съгласно формула (3.18)

$$S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$



Фигура 3.4: $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [0, 3]$



Фигура 3.5: $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$

б) При $x \in [2, 3]$ графиката на дадената функция е под абсцисната ос (Фиг. 3.4), следователно приложима е формула (3.19):

$$S_2 = - \int_2^3 (4 - x^2) dx = - \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = -(12 - 9) + \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{3}.$$

в) В разглеждания интервал $[0, 3]$ функцията $y = 4 - x^2$ сменя знака си в точката $x = 2$, като $y \geq 0$, $x \in [0, 2]$ и $y \leq 0$, $x \in [2, 3]$.

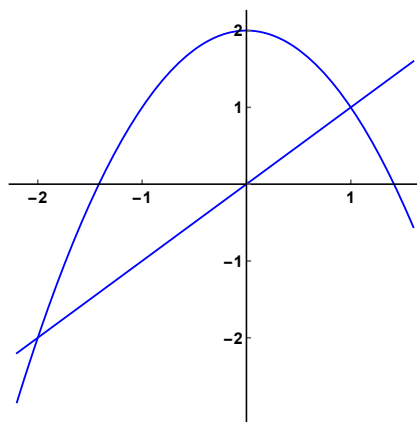
Следователно

$$S = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_2^3 (4 - x^2) dx = S_1 + S_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

Сега ще разгледаме случай на криволинеен трапец с *две криви страни*.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ функции, които са непрекъснати в интервала $[a, b]$ и освен това $g(x) \leq f(x)$. Лицето на криволинейния трапец

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\},$$



Фигура 3.6: $g(x) = x$, $f(x) = 2 - x^2$

ограничен отгоре от графиката на функцията $f(x)$, отдолу от графиката на функцията $g(x)$, както и от вертикалните прави $x = a$ и $x = b$ (Фиг. 3.4), се пресмята по формулата

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) се получава чрез прилагане на формулите (3.18), (3.19) за всяка от функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 3.24 Да се пресметне лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите $y = 2 - x^2$ и $y = x$.

Ще намерим пресечните точки на графиките на двете функции (Фиг. 3.6):

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2, \end{cases}$$

тогава $x = 2 - x^2$; $x^2 + x - 2 = 0$, откъдето получаваме корени $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Следователно пресечните точки на графиките на двете функции са $(-2, -2)$ и $(1, 1)$.

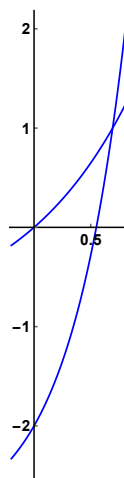
Тогава прилагаме (3.20), като в случая $f(x) = 2 - x^2$, а $g(x) = x$:

$$\int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{9}{2} = 4.5.$$

Пример 3.25 Да се пресметне лицето на фигурата, заградена от ординатната ос ($Oy : x = 0$) и графиките на функциите $y = e^{2x} - 3$ и $y = e^x - 1$.

Първо ще намерим пресечните точки на графиките на двете функции (ако има такива). За тази цел трябва да решим системата:

$$\begin{cases} y = e^{2x} - 3 \\ y = e^x - 1 \end{cases}$$



Фигура 3.7: $g(x) = e^{2x} - 3$, $f(x) = e^x - 1$

Оттук следва, че $y = e^{2x} - 3 = e^x - 1$, т.е. $e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

За да решим това уравнение, полагаме $e^x = u > 0$ (експонентата има само положителни стойности!) и получаваме квадратното уравнение $u^2 - u - 2 = 0$. То има корени $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Положителен е само вторият корен и от него получаваме съответната стойност за x :

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2.$$

Следователно графиките на двете функции имат една пресечна точка с абсциса $x = \ln 2$, а нейната ордината получаваме, като заместим в коя да е от двете функции:

$$y = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Графиките на двете функции са дадени на Фиг. 3.7. Лицето на фигурата, която графиките на двете функции и ординатната ос заграждат, намираме по формула (3.20), като съответно $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = e^{2x} - 3$. Интегрираме в граници от $a = 0$ до $b = \ln 2$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln 2} (e^x - 1 - (e^{2x} - 3)) dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x} + 2) dx = \left(e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2x \right) \Big|_0^{\ln 2} \\ &= \underbrace{e^{\ln 2}}_2 - \frac{1}{2} \underbrace{e^{2 \ln 2}}_4 + \underbrace{2 \ln 2}_{\ln 4} - \left(\underbrace{e^0}_1 - \frac{1}{2} \underbrace{e^0}_1 + 0 \right) = 2 - 2 + \ln 4 - \frac{1}{2} = \ln 4 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задачи за упражнение: Намерете лицата на равнинните фигури, заградени от:

$$3.5. \quad \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{array} \right. \quad \text{Отг. } \frac{1}{3}$$

$$3.6. \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ y = 0 \\ x = e \end{array} \right. \quad \text{Отг. } 1$$

$$3.7. \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{array} \right. \quad \text{Отг. } \frac{8}{3}$$

$$3.8. \left| \begin{array}{l} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{array} \right. \quad \text{Отг. } 20\frac{5}{6}$$

3.8.2. Дължина на дъга от равнинна крива в Декартова координатна система

Нека $f(x)$ е функция, която е дефинирана и гладка (т.е. притежава непрекъсната производна!) поне в интервала $[a, b]$. Означаваме с γ частта от графиката на $y = f(x)$, когато $a \leq x \leq b$.

Теорема 3.7 Нека γ е графиката на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ и $f(x)$ притежава непрекъсната производна в $[a, b]$.

Тогава γ има дължина, която се определя по формулата

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3.21)$$

Пример 3.26 Да се пресметне дължината на частта от графиката на $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ при $x \in [0, 1]$.

Първо пресмятаме, че

$$y' = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},$$

като при диференциране използвахме табличната производна $(x^n)' = nx^{n-1}$ при $n = \frac{3}{2}$.

Тогава $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x}$. Прилагаме формула (3.21):

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x} d(1 + x) \\ &= \frac{2}{3} (1 + x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{3}, \end{aligned}$$

като тук използвахме табличния интеграл $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n = \frac{1}{2}$.

Глава 4

Обикновени диференциални уравнения. Някои основни видове обикновени диференциални уравнения от първи ред

4.1 Обикновени диференциални уравнения – основни понятия и дефиниции

Равенство от вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

свързващо независимата променлива x , неизвестната функция $y = y(x)$ и нейните производни $y', y'', \dots, y^{(n)}$, се нарича **диференциално уравнение**. Да отбележим, че наличието на поне една (някоя, от някакъв ред) производна в (4.1) е задължително.

Ако диференциалното уравнение (ДУ) (4.1) може да се запише във вида

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.2)$$

т.е. ако производната от най-висок ред в (4.1) може да се изрази в явен вид посредством всичко останало, то казваме, че уравнението е **решено относно старшата производна**. Записът (4.2) е **нормален вид** на ДУ (4.1).

Уравнението (4.1) или (4.2) се нарича **обикновено диференциално уравнение от n -ти ред**, тъй като съдържа само обикновени (а не частни!) производни на неизвестната функция y . Прилагателното *обикновено* означава, че функцията $y = y(x)$ зависи само от една независима променлива и оттук нататък ще го пропускаме, защото ще се занимаваме само с такива ДУ.

Най-високият ред на производните, които се срещат в едно ДУ, се нарича **ред на диференциалното уравнение**. Например (4.1) и (4.2) са от n -ти ред, защото съдържат $y^{(n)}$.

Уравнението $y' + 2y^2 = x$ е от първи ред, а уравнението $y'' - y' + x = 0$ е от втори ред и т.н.

Решение (или **интеграл**) на ДУ (4.1) се нарича всяка функция $y = \varphi(x)$, която притежава производни до n -ти ред включително и, заместена в (4.1), го превръща в тъждество.

Различаваме *три типа решения* на диференциално уравнение:

а) **Общо решение** – то зависи от толкова на брой произволни константи, колкото е редът на диференциалното уравнение:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Така например, от едно от най-простите по вид ДУ $y' = \cos x$ следва

$$y = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1,$$

докато за уравнението $y'' = 0$ получаваме $(y')' = 0$, откъдето $y' = C_1$ и тогава

$$y = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2.$$

б) **Частно решение** е такова решение на ДУ, което се получава от неговото общо решение за някои (конкретни) стойности на константите. Следователно, за да получим частно решение на някое ДУ, трябва да разполагаме с толкова на брой условия, колкото е редът на уравнението, за да определим конкретните стойности на константите, фигуриращи в общото решение.

Когато са зададени такива условия и те са в една и съща, фиксирана точка в равнината, казваме, че е дадена **задача с начални условия**, или **задача на Коши**.

в) **Особено решение**, ако съществува, е такова решение, което не би могло да се получи от общото решение за никой избор на константите.

Пример 4.1 $(y')^2 + y^2 = 1$

Общото решение (общ интеграл) на това диференциално уравнение от първи ред е $y^2 = \cos^2(x + C)$, т.е. $y = \pm \cos(x + C)$.

При $C = \frac{\pi}{2}$, $y = \pm \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \mp \sin x$ е частно решение.

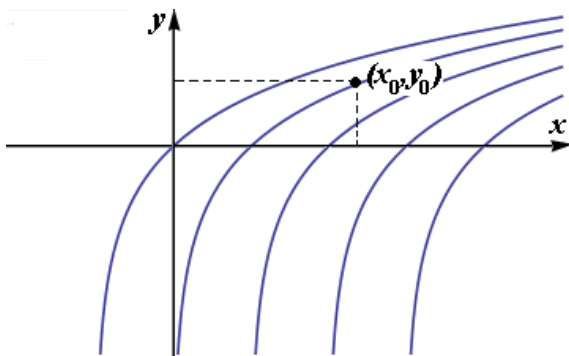
$y = \pm 1$ е особено решение.

Диференциалните уравнения освен чрез своя ред се класифицират и по степента на неизвестната функция и на участващите нейни производни.

Диференциалното уравнение е **линейно**, ако неизвестната функция y и нейните производни фигурират в уравнението на първа степен. Например

$$y''' + x^2 y' + y = \cos x$$

е линейно ДУ от трети ред. (Забележете, че функцията в дясната част и един от коефициентите (x^2) не са линейни функции; линейно участват y, y' и y''' , което е определящо.)



Фигура 4.1: Фамилия от криви: за да получим частно решение и да определим търсената интегрална крива, налагаме условие $y(x_0) = y_0$, където y_0 е дадено число.

Линейните диференциални уравнения имат широко приложение в инженерната практика и са най-добре изучени.

Когато диференциалното уравнение не може да бъде причислено към линейни ДУ, то е **нелинейно**. Нелинейни са например следните диференциални уравнения:

$$yy'' - y''' = 0, \quad (\text{нелинейно ДУ от трети ред})$$

$$y^{(n)} + xy^2 = e^x, \quad (\text{нелинейно ДУ от } n\text{-ти ред})$$

$$y' + \tan y = x. \quad (\text{нелинейно ДУ от първи ред})$$

4.2 Диференциални уравнения от първи ред

Диференциалните уравнения от първи ред са най-широко прилагани в практиката за изучаване на естествени процеси и инженерни проблеми.

Общият вид на ДУ от първи ред е

$$F(x, y, y') = 0. \quad (4.3)$$

Ако уравнение (4.3) е **решено относно производната**, то съответният му нормален вид е

$$y' = f(x, y). \quad (4.4)$$

Общото решение на (4.3) (или на (4.4)) е диференцируема функция $y = \varphi(x, C)$, която, заместена в (4.3) (или в (4.4)), го превръща в тъждество и C е произволна константа. Това решение е множество (*фамилия*) от криви (*интегрални криви*) в равнината (Фиг. 4.1).

Важно е да подчертаем, че при решаване на едно ДУ от първи ред е почти задължително вместо y' да записваме неговата диференциална форма. т.е. $y' = \frac{dy}{dx}$ (Гаус, 1777 - 1855), което ни позволява евентуално в даден момент поради целесъобразност да разменяме ролите на x и y .

Като заместим $y' = \frac{dy}{dx}$, от (4.4) можем да получим представянето

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4.5)$$

където P и Q са функции на x и y .

Забележка 4.1 В общото решение константата C поема всички позволени действия с числата. Така например имаме възможност да добавяме числа, да умножаваме и делим с число (различно от нула), да степенуваме, логаритмуваме и т.н., както и да означаваме с друга буква. Тези манипулации, разбира се, не променят общото решение, а само неговата форма (запис). Всичко казано дотук дава възможност на потребителя на един и същ диференциален математически модел да представи крайното решение в удобен за него вид.

От тук нататък в примерите константата ще записваме след извършване на действието интегриране.

Пример 4.2: Диференциалното уравнение $x + yy' = 0$ да се представи във вида (4.5). Да се намери онази крива от общото решение, която минава през точката $(5, 12)$.

От изходния вид на уравнението, предвид $y' = \frac{dy}{dx}$ получаваме

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0,$$

или

$$xdx + ydy = 0.$$

Така достигаме до диференциала:

$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0,$$

следователно

$$x^2 + y^2 = C.$$

И така, интегралните криви са фамилия концентрични окръжности с радиус $R = \sqrt{C}$:

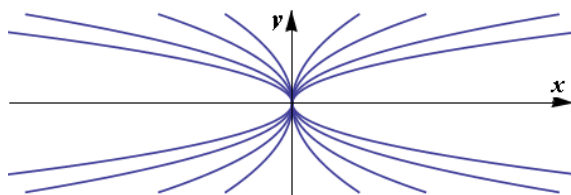
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Търсеното частно решение ще получим, като в горното уравнение заместим със зададената точка $(5, 12)$:

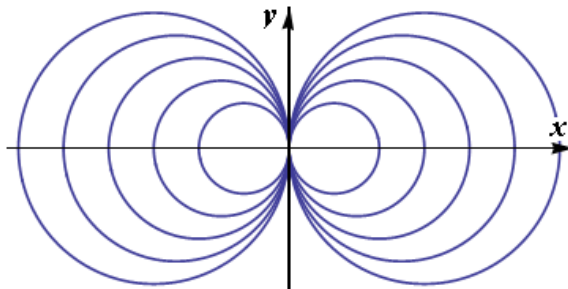
$$5^2 + 12^2 = R^2 \Rightarrow 169 = R^2 \Rightarrow R = 13.$$

Търсеното частно решение тогава е $x^2 + y^2 = 169$.

Намирането на общо и частно решение на диференциално уравнение се нарича *права задача*. В практиката важна е и т. нар. *обратна задача*. При обратната задача, ако е дадена фамилия криви в равнината, трябва да се намери кое е диференциалното



Фигура 4.2: Фамилия от параболи



Фигура 4.3: Фамилия от окръжности

уравнение, което я е породило. Тази задача се решава чрез диференциране и елиминирание на произволната константа (*параметър на фамилията криви*).

Пример 4.3: Да се реши обратната задача за фамилията параболи $y^2 = 2px$ (Фиг. 4.2).

Диференцираме $y^2 = 2px$ (относно x , естествено!):

$$2yy' = 2p \quad \text{откъдето} \quad p = yy'.$$

Тогава, като заместим p в уравнението, дадено по условие, получаваме

$$y^2 = 2yy'x,$$

следователно

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Пример 4.4: Да се реши обратната задача за следната фамилия окръжности (Фиг. 4.3):

$$x^2 + y^2 + Cx = 0.$$

Диференцираме $x^2 + y^2 + Cx = 0$:

$$2yy' + 2x + C = 0 \quad \text{откъдето} \quad C = -2yy' - 2x.$$

Тогава, като заместим C в уравнението на фамилията окръжности, получаваме

$$y^2 - x^2 = 2xyy',$$

откъдето

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}.$$

Задачи за упражнение: Намерете дифференциалните уравнения, породили следните фамилии криви:

4.1. Семейството от параболи: $y = Cx^2$ Отг. $xy' = 2y$

4.2. Снопът от прави през точка $(0, 0)$: $y = kx$ Отг. $y' = \frac{y}{x}$

4.3. Семейството от равнораменни хиперболи: $y = \frac{C}{x}$ Отг. $y' = -\frac{y}{x}$

4.4. Снопът от експоненциални криви през точка $(0, 1)$: $y = e^{\alpha x}$ Отг.
 $xy' = y \ln y$

В следващите раздели ще се спрем на дифференциални уравнения (ДУ) от първи ред, които са *решени относно производната*, т. е. нормалният им вид е (4.4), или са записани с тяхното еквивалентно представяне в *дифференциална форма* (4.5).

4.3 Дифференциални уравнения с разделящи се променливи

Ако в (4.4) функцията $f(x, y)$ може да се представи като произведение от функции, зависещи само от една променлива:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y),$$

то уравнението е с **разделящи се променливи**:

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (4.6)$$

От (4.6) последователно получаваме:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad \Leftrightarrow \quad dy = f_1(x)f_2(y)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \quad f_2(y) \neq 0,$$

откъдето след интегриране се стига до общото решение.

Да отбележим, че общото решение се получава при $f_2(y) \neq 0$, а от равенството $f_2(y) = 0$ (ако това равенство е възможно за някое y) евентуално биха могли да се получат особени решения.

Съответно, ако в представянето (4.5) функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ зависят само от една променлива:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (4.7)$$

или са произведение от функции, зависещи само от една променлива:

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0,$$

т.е. при $P_2(y) \neq 0$, $Q_1(x) \neq 0$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0, \quad (4.8)$$

то ДУ също е с **разделящи се променливи**.

Уравнението (4.7) (или (4.8)) отново се решава посредством интегриране.

Да отбележим също, че при $P_2(y) = 0$ (стига да е възможно) биха могли да се получат едно или няколко особени решения.

Пример 4.5: Да се намери общото решение на диференциалното уравнение

$$y' = 3x^2y$$

и онова частно решение, за което е изпълнено началното условие $y(0) = 2$.

И така, разделяме изходното уравнение на y при $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx.$$

Интегрираме полученото уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int x^2 dx$$

и записваме за удобство произволната константа от интегриране като $\ln |C|$, $C \neq 0$:

$$\ln |y| = x^3 + \ln |C|,$$

т.е.

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = x^3.$$

Антилогаритмуваме и получаваме $\left| \frac{y}{C} \right| = e^{x^3}$, т.е. $\frac{y}{C} = \pm e^{x^3}$.

Но C е произволна константа (произволна и по стойност, и по знак), следователно можем да пропуснем знака $\pm$, така че

$$y = Ce^{x^3},$$

което е общото решение на даденото ДУ.

За да намерим частното решение, удовлетворяващо началното условие $y(0) = 2$, заместваме в общото решение y с 2, а x с 0: $2 = Ce^0 = C$.

Следователно търсеното частно решение (при $C = 2$) е $y = 2e^{x^3}$.

Да подчертаем, че общото решение (а оттам и всички частни решения) се получава, когато $y \neq 0$. Когато $y = 0$, непосредствената проверка показва, че това е особено решение на даденото диференциално уравнение.

Пример 4.6: Ще решим уравнение, дадено в диференциален запис от вида (4.5):

$$(xy^2 - x)dx - (x^2 + 1)ydy = 0.$$

Уравнението екивалентно на

$$x(y^2 - 1)dx - (x^2 + 1)ydy = 0.$$

Разделяме променливите:

$$\frac{x}{x^2 + 1} dx - \frac{y}{y^2 - 1} dy = 0, \quad y^2 - 1 \neq 0.$$

Интегрираме полученото уравнение:

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0,$$

откъдето, след внасяне съответно на x и y под знака на диференциала, стигаме до

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dy^2}{y^2 - 1} = 0;$$

$$\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \int \frac{d(y^2 - 1)}{y^2 - 1} = 0;$$

$$\ln(x^2 + 1) - \ln|y^2 - 1| + \ln|C| = 0,$$

като произволната константа от интегрирането за удобство сме записали не като C , а като $\ln|C|$.

Преобразуваме последното равенство въз основа на свойствата на логаритмичната функция ($\ln a + \ln b = \ln ab$; $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$):

$$\ln \left| \frac{C(x^2 + 1)}{y^2 - 1} \right| = 0$$

т.е. след антилогаритмуване получаваме общия интеграл на даденото диференциално уравнение:

$$\left| \frac{C(x^2 + 1)}{y^2 - 1} \right| = 1, \quad \text{следователно} \quad \frac{C(x^2 + 1)}{y^2 - 1} = 1,$$

4.4 Хомогенни диференциални уравнения от първи ред

Диференциално уравнение от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.9}$$

се нарича **хомогенно диференциално уравнение от първи ред**. Решава се, като се свежда към диференциално уравнение с *разделящи се променливи*.

По-конкретно, въвеждаме нова функция $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, т.е. $y = xz$, откъдето след диференциране се получава, че $y' = z + xz'$.

Тогава, като заместим в (4.9), получаваме:

$$z + xz' = f(z), \quad \text{или} \quad x \frac{dz}{dx} = f(z) - z.$$

Последното е ДУ с разделящи се променливи, защото

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}, \quad \text{откъдето} \quad \int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln x + \ln C = \ln Cx.$$

След интегрирането е необходимо да се върнем към функция y , като заместим $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Определение 4.1 *Функцията на две променливи $P(x, y)$ е хомогенна от степен k , ако при заместване на x с tx и на y с ty ($t = \text{const}$) се получава*

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y).$$

Например функцията $x^2 + xy + y^2$ е хомогенна от степен 2; функцията $\sqrt{x^2 + y^2}$ е хомогенна от степен 1; функцията $\frac{x+y}{x-y}$ е хомогенна от степен 0.

Всяко ДУ от първи ред, записано във вида (4.4), е *хомогенно диференциално уравнение от първи ред*, ако функцията $f(x, y)$ е хомогенна от степен 0.

Всяко ДУ от първи ред, записано във вида (4.5), е *хомогенно диференциално уравнение от първи ред*, ако функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са хомогенни от една и съща степен.

Пример 4.7: Ще решим хомогенното ДУ от първи ред

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Полагаме $z = \frac{y}{x}$, откъдето $y = xz$, а след диференциране се получава $y' = z + xz'$.

Заместваме в диференциалното уравнение y' и $\frac{y}{x}$:

$$z + xz' = z - \frac{1}{z};$$

$$xz' = -\frac{1}{z}, \quad \text{т.е.} \quad xdz + \frac{dx}{z} = 0,$$

което е ДУ с разделящи се променливи.

Решаваме това уравнение:

$$zdz + \frac{dx}{x} = 0,$$

откъдето, като интегрираме, получаваме

$$\frac{z^2}{2} + \ln|x| + \ln|C| = 0, \quad \text{т.е.} \quad z^2 = -2\ln|Cx|.$$

Оттук, като заместим $z = \frac{y}{x}$, стигаме до общия интеграл на даденото ДУ

$$y^2 = -2x^2 \ln|Cx|.$$

Пример 4.8: $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

Функциите $x^2 + y^2$ и $2xy$ са хомогенни от една и съща степен 2, следователно тяхното частно е хомогенна функция от степен 0, така че даденото ДУ от първи ред е хомогенно.

Правим смяна $y = xz$ (откъдето $y' = z + xz'$) и заместваме в уравнението:

$$z + xz' = \frac{x^2 + x^2z^2}{2x^2z};$$

$$z + xz' = \frac{x^2(1 + z^2)}{2x^2z} = \frac{1 + z^2}{2z};$$

$$xz' = \frac{1 + z^2}{2z} - z = \frac{1 - z^2}{2z};$$

т.е. стигаме до

$$z' = \frac{1}{x} \frac{1 - z^2}{2z},$$

което е ДУ с разделящи се променливи.

За него получаваме:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{1 - z^2}{2z} \Leftrightarrow dz = \frac{1}{x} \frac{1 - z^2}{2z} dx;$$

$$\frac{2z dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}, \quad z \neq \pm 1;$$

$$\frac{dz^2}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}; \quad -\frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрираме полученото равенство:

$$\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} + \int \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln|1 - z^2| + \ln|x| + \ln|C| = 0,$$

т.е.

$$\ln|Cx(1 - z^2)| = 0,$$

откъдето, след антилогаритмуване,

$$|Cx(1 - z^2)| = 1, \quad \text{т.е.} \quad Cx(1 - z^2) = 1.$$

Остава в полученото да заместим $z = \frac{y}{x}$:

$$Cx \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 \quad \text{т.е.} \quad \frac{Cx(x^2 - y^2)}{x^2} = 1,$$

следователно

$$\frac{C(x^2 - y^2)}{x} = 1.$$

4.5 Линејни диференциални уравнения от първи ред

Общият вид на **линейно диференциално уравнение от първи ред** е

$$y' + A(x)y = B(x), \quad (4.10)$$

където $A(x)$ е **функция-коэффициент**, а $B(x)$ е **дясна част** на уравнението.

Ако $B(x) \equiv 0$, то (4.10) се нарича **линейно хомогенно ДУ от първи ред**, а в противен случай то е **нехомогенно**.

Очевидно хомогенното ДУ

$$y' + A(x)y = 0$$

спада към диференциални уравнения с разделящи се променливи:

$$\frac{dy}{y} = -A(x)dx$$

и след интегриране ще получим неговото общо решение:

$$y(x) = Ce^{-\int A(x) dx}. \quad (4.11)$$

Общото решение на (4.10) ще намерим въз основа на общото решение на (4.11), като приложим **метода на вариране на константата** C . Това означава, че в (4.11) ще заменим C с функция (засега неизвестна) $U(x)$. Тази гениална идея принадлежи на Лагранж (1736 - 1813).

И така, търсим решение на (4.10) във вида

$$y(x) = U(x)e^{-\int A(x) dx}.$$

Тогава

$$y'(x) = U'(x)e^{-\int A(x) dx} + U(x) \left(e^{-\int A(x) dx}\right)'$$

$$= U'(x)e^{-\int A(x) dx} + U(x)e^{-\int A(x) dx}(-A(x)).$$

Да заместим $y'(x)$ и $y(x)$ в уравнението (4.10):

$$U'(x)e^{-\int A(x) dx} - A(x)U(x)e^{-\int A(x) dx} + A(x)U(x)e^{-\int A(x) dx} = B(x).$$

Оттук за $U'(x)$ имаме:

$$U'(x) = B(x)e^{\int A(x) dx}.$$

За неизвестната функция $U(x)$ окончателно получаваме:

$$U(x) = \int B(x)e^{\int A(x) dx} dx + C,$$

където C е произволна константа.

Тогава общото решение на линейното нехомогенно ДУ (4.10) е:

$$y(x) = e^{-\int A(x) dx} \left(C + \int B(x)e^{\int A(x) dx} dx \right). \quad (4.12)$$

Така решаването на този тип уравнения от първи ред става чрез директно заместване във формулата (4.12) на съответната функция-коэффициент $A(x)$ и на дясната част $B(x)$.

Нека да отбележим една важна изчислителна особеност при произволно $k = \text{const}$. Приемаме, че $x > 0$, тъй като при реалните задачи от практиката, които се описват с линейни ДУ от първи ред променливата приема неотрицателни стойности. Тогава:

$$e^{k \int \frac{dx}{x}} = e^{k \ln x} = e^{\ln x^k} = x^k.$$

Пример 4.9: Като използваме последните пояснения, лесно ще решим следното линейно диференциално уравнение от първи ред:

$$xy' + y = x^3.$$

Първо да го приведем във вида (4.10) (т.е. коэффициентът пред y' да стане 1), като за целта разделим уравнението на x :

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2.$$

Тогава прилагаме формула (4.12) при $A(x) = \frac{1}{x}$ и $B(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int x^2 e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + \int x^2 x dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \frac{x^4}{4} \right) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}. \end{aligned}$$

Пример 4.10: Да се намери това частно решение на линейното ДУ

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

което удовлетворява началното условие $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

За да намерим кое да е частно решение, първо трябва да намерим общото решение на това ДУ, след което да приложим даденото начално условие.

За тази цел, прилагаме формула (4.12), като в случая $A(x) = \frac{1}{x}$ и $B(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right).$$

Първо пресмятаме, че

$$e^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad e^{\int \frac{dx}{x}} = x.$$

При интегрирането по-горе не включихме произволна константа, защото такава вече е предвидена във формулата за общото решение на линейно ДУ от първи ред.

Заместваме в израза на общото решение:

$$y = \frac{1}{x} \left(C + \int \frac{\sin x}{x} x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C \int \sin x dx \right) = \frac{1}{x} (C - \cos x).$$

И така, от общото решение $y = \frac{1}{x} (C - \cos x)$ сега ще получим това частно решение, което удовлетворява началното условие $y(\frac{\pi}{2}) = 0$:

$$0 = \frac{C - \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{откъдето } C = 0.$$

Търсеното частно решение тогава (при $C = 0$) е:

$$y = -\frac{\cos x}{x}.$$

4.6 Диференциални уравнения на Бернули

Диференциалните уравнения на Бернули (1700 - 1782) са уравнения, приводими към линейни. Те имат вида

$$y' + A(x)y = B(x)y^m, \quad m \neq 0; 1. \quad (4.13)$$

Ако $m = 0$, то уравнение (4.13) е *линейно ДУ от първи ред*; ако $m = 1$, то уравнението е с *разделящи се променливи*, а също спада и към *линейни хомогенни ДУ от първи ред*. Следователно, интерес за нас би трябвало да представляват, а и има смисъл да бъдат разгледани случаите, при които $m \neq 0; 1$.

За да сведем уравнение (4.13) към линейно ДУ, нека да разделим на y^m :

$$\frac{y'}{y^m} + A(x)y^{1-m} = B(x).$$

Полагаме $y^{1-m} = z(x)$ – нова функция.

Тогава

$$z' = (1-m)y^{-m}y', \quad \text{откъдето следва и } \frac{y'}{y^m} = \frac{1}{1-m}z'$$

и след заместване получаваме линейно диференциално уравнение (напомняме, че $m \neq 1$):

$$\frac{1}{1-m}z' + A(x)z = B(x), \quad \text{или } z' + (1-m)A(x)z = (1-m)B(x).$$

Това уравнение се решава по формула (4.12), след което трябва да се върнем към първоначалната функция y , като заместим z с y^{1-m} .

Пример 4.11: Да се намери това частно решение на диференциалното уравнение на Бернули

$$y' - xy = xy^2,$$

което удовлетворява началното условие $y(0) = 1$.

Първо ще намерим общото решение на това уравнение. За тази цел делим на y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} - x\frac{1}{y} = x.$$

За даденото диференциално уравнение $m = 2$, така че полагаме $z = \frac{1}{y}$, откъдето след диференциране получаваме $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

След като заместим в изходното ДУ, стигаме до линейното ДУ

$$z' + xz = -x,$$

за което прилагаме формула (4.12) за общото решение:

$$z = e^{-\int x dx} \left(C - \int x e^{\int x dx} dx \right).$$

Пресмятаме, че $e^{\pm \int x dx} = e^{\pm \frac{x^2}{2}}$ и тогава общото решение добива вида (за $x \geq 0$)

$$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(вносяме } x \text{ под знака на диференциала: } x dx = d \frac{x^2}{2}) \\
 & = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C - e^{\frac{x^2}{2}} \right) = C e^{-\frac{x^2}{2}} - 1.
 \end{aligned}$$

Тогава, като се върнем към първоначалната функция y съгласно полагането, което направихме в началото $\left(z = \frac{1}{y} \right)$, получаваме:

$$\frac{1}{y} = C e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \quad \text{и тогава} \quad y = \frac{1}{C e^{-\frac{x^2}{2}} - 1},$$

което е общото решение на даденото ДУ на Бернули.

За да намерим частно решение, за което $y(0) = 1$, заместваме с това начално условие в полученото по-горе общо решение: $1 = \frac{1}{C - 1}$, т.е. $C = 2$.

И така, търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1}.$$

4.7 Точни диференциални уравнения от първи ред

Разглеждаме диференциално уравнение от първи ред, записано в диференциална форма (4.5):

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Ако лявата страна на уравнение (4.5) е пълен диференциал на (някоя) функция на две променливи, то това уравнение е **точно диференциално уравнение**, или **уравнение в пълен диференциал**.

Ако (4.5) е *точно диференциално уравнение*, това означава, че съществува функция $u(x, y)$ такава, че

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Необходимо и достатъчно условие да съществува такава функция $u(x, y)$ (при зададени $P(x, y)$ и $Q(x, y)$) е

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \quad (4.14)$$

В такъв случай, след като диференциалното уравнение (4.5) е *точно ДУ*, то може да се запише като

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = 0,$$

т.е.

$$du(x, y) = 0.$$

Тогава $u(x, y) = C$, което представлява и общото решение на уравнение (4.5).

Следователно решаването на точно диференциално уравнение се състои в намиране на функцията $u(x, y)$.

Много конкретни диференциални уравнения могат да се класифицират като точни. При тях намирането на общо решение може лесно да се алгоритмизира и затова те се разглеждат отделно.

Извършваме следните стъпки:

1. Проверяваме (4.14) и ако е изпълнено, продължаваме.

2. Интегрираме $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ относно x , следователно $u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$ (или интегрираме $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$ относно y , следователно $u(x, y) = \int Q(x, y) dy + \psi(x)$).

Няма значение кое от двете равенства интегрираме, изборът е само от съображение за техническа трудност.

3. Неизвестната функция $\varphi(y)$ (или $\psi(x)$) ще определим от $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$ (или съответно $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$).

Този алгоритъм ще илюстрираме със следващия пример.

Пример 4.12: $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^2) dy = 0$

В случая $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^2$.

Пресмятаме, че

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 12xy \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 12xy,$$

т.е. условието (4.14) е изпълнено, следователно даденото уравнение е точно ДУ.

Интегрираме $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$:

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

За да определим $\varphi(y)$, диференцираме това равенство относно y :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 6x^2y + \varphi'(y)$$

и го сравняваме с

$$Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 6x^2y + 4y^2,$$

откъдето получаваме, че

$$\varphi'(y) = 4y^2.$$

Следователно

$$\varphi(y) = \int 4y^2 dy = \frac{4}{3}y^3 + c.$$

Тогава $u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 + c$, $c = \text{const}$ и тъй като общото решение има вида $u(x, y) = C$, то е

$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C.$$

Задачи за упражнение: Решете следните диференциални уравнения:

4.5. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

4.6 $y' = \frac{y}{x} - 2$

4.7. $e^x y dx - (e^x + 1) dy = 0$

4.8. $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$

4.9. $e^x y' = e^y$

4.10. $xy' - 3y = x^2$

4.11 $(2x + y) dx + (x - 4y) dy = 0$

Глава 5

Линейни обикновени диференциални уравнения от n -ти ред

5.1 Общи понятия

Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

където $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ са дадени функции, се нарича **линейно нехомогенно диференциално уравнение от n -ти ред**.

Ако в (5.1) $f(x) \equiv 0$, то

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (5.2)$$

се нарича **линейно хомогенно диференциално уравнение от n -ти ред (ЛХДУ)**.

Ясно е, че общите решения на (5.1) и (5.2) ще зависят от n на брой произволни константи. За да бъдат определени тези константи, трябва да имаме n на брой условия за функцията и нейните производни до $n-1$ ред включително във фиксирана точка x_0 .

Съвкупността от диференциалното уравнение и тези n на брой условия се нарича **задача с начални условия** или **задача на Коши**.

Да означим с $L[y]$ лявата част на (5.1) (или съответно (5.2)), т.е.

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

$L[y]$ ще наричаме **линеен диференциален оператор** от n -ти ред. Операторът действа върху функция (множество от функции) и като резултат се получава друга функция.

Уравненията (5.1) и (5.2) могат да се запишат в съкратен вид съответно като:

$$L[y] = f(x), \quad (5.3)$$

$$L[y] = 0. \quad (5.4)$$

Линейният оператор притежава две *основни* свойства:

а) **адитивност**: $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$;

б) **хомогенност**: $L[\alpha y] = \alpha L[y]$, $\alpha = \text{const.}$

Като съчетание на тези две свойства получаваме свойството **линейност**:

$$L[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L[y_1] + \alpha_2 L[y_2],$$

където y_1 и y_2 са диференцируеми функции до ред, равен на реда на съответния диференциален оператор, а α_1 и α_2 са произволни числа.

5.2 Линейни хомогенни диференциални уравнения и свойства на техните решения

В този параграф ще се занимаем с хомогенното уравнение (5.2) (или (5.4)).

Очевидно, от свойствата на диференциалния оператор следва, че:

- ако y_1 и y_2 са две решения на (5.4), то $y_1 + y_2$ също е решение на ЛХДУ (5.4);
- ако y е решение на (5.4), то Cy също е решение на ЛХДУ (5.4) при произволна константа C .

В частност, ако функцията $y(x)$ има реална и имагинерна част, т.е.

$$y(x) = u(x) + i v(x)$$

и $y(x)$ е решение (т.е. $L[y] = 0$), то тогава $u(x)$ и $v(x)$ са също решения: $L[u] = L[v] = 0$.

Ще припомним едно от най-важните понятия не само в математиката. Това е *линейната зависимост/независимост*.

Определение 5.1 Нека имаме едно множество от n на брой функции $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, диференцируеми до $n - 1$ ред включително в интервал (a, b) .

Тези функции са **линейно зависими**, ако съществуват числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не всичките едновременно равни на 0 и такива, че

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0. \quad (5.5)$$

Ако обаче равенството (5.5) е възможно единствено когато $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ са **линейно независими**.

Тази дефиниция има безброй приложения не само в разглежданата теория, а например и в различните геометрични аспекти чрез понятията *координатна система* и *размерност*.

В класа от $n - 1$ пъти диференцируеми функции (а $y_1, y_2, \dots, y_n$ са точно такива!) може да се състави следната детерминанта:

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

която се нарича **детерминанта на Вронски** (1776-1853).

Чрез нея лесно се определя кога функциите са линейно зависими или независими:

- системата от функции $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ е **линейно зависима** тогава и само тогава, когато $W_n(x) \equiv 0$;

- системата от функции $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ е **линейно независима**, ако $W_n(x)$ не е тъждествено равна на 0.

Например следните системи от функции са линейно независими:

$$\{1, x, x^2, x^3\}; \quad \{e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}; \quad \{1, \cos x, \sin x\}.$$

В практиката по-често работим със системи с по-малка размерност и затова илюстративните примери са за $n \leq 4$.

За даден интервал (a, b) и система от n на брой решения на ЛХДУ (5.4), ако дори в една точка $W_n(x) \neq 0$, то тези решения са *линейно независими*.

Определение 5.2 Всяка система от n на брой линейно независими решения на ЛХДУ (5.4) $y_1, y_2, \dots, y_n$ се нарича **фундаментална система от решения** на това уравнение.

Това определя и структурата на общото решение на едно ЛХДУ. Уравнението има точно n на брой линейно независими решения, т.е.

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

където $C_1, C_2, \dots, C_n$ са произволни числа, а $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ е фундаментална система от решения на (5.4).

Така можем да решим обратната задача: ако знаем фундаменталната система от решения, да намерим самото диференциално уравнение.

Пример 5.1: Кое е диференциалното уравнение с фундаментална система от решения $\{\cos x, \sin x\}$?

Тъй като дадената система е фундаментална по условие, то ако към нея прибавим още една функция – решението y на търсеното диференциално уравнение, ще получим $W_n(x) = 0$:

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} y & \cos x & \sin x \\ y' & (\cos x)' & (\sin x)' \\ y'' & (\cos x)'' & (\sin x)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \cos x & \sin x \\ y' & -\sin x & \cos x \\ y'' & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0.$$

Развиваме по първи стълб:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= y \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \\ &= y(\sin^2 x + \cos^2 x) - y'(-\cos x \sin x + \sin x \cos x) + y''(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0, \end{aligned}$$

следователно получаваме $y'' + y = 0$.

Задача за упражнение:

5.1. Да се намери диференциалното уравнение, което има фундаментална система от решения $\{x, e^{-x}\}$. (Отг. $(x+1)y'' + xy' + y = 0$)

5.3 Линеини хомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Уравнението от вида

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (5.6)$$

където $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ са реални числа, се нарича **линейно хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти**.

Неизвестната функция е $y(x)$, а $L[y]$ е линеен диференциален оператор от n -ти ред.

Ще търсим решение на (5.6) във вид на експоненциална функция e^{rx} , където r е неизвестен параметър.

Да отбележим, че всяка поредна производна на e^{rx} добавя множител r , т.е.

$$(e^{rx})' = r e^{rx}, \quad (e^{rx})'' = r^2 e^{rx}, \quad (e^{rx})''' = r^3 e^{rx}, \quad \dots, \quad (e^{rx})^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Като заместим в (5.6), получаваме:

$$r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0.$$

Съкращаваме на e^{rx} и стигаме до:

$$L_n(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Полиномът $L_n(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$ се нарича **характеристичен полином**, съответстващ на диференциалния оператор $L[y]$, а $L_n(r) = 0$ е **характеристично уравнение**.

За да бъде функция от вида e^{rx} решение на (5.6), очевидно числото r е корен на $L_n(r)$.

Следователно, за да решим (5.6), е необходимо да намерим корените $r_1, r_2, \dots, r_n$ на характеристичния полином. Проблемът е, че функциите $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ трябва да образуват фундаментална система от решения, т.е. да са линейно независими.

Възможни са следните случаи:

I. корените са реални и различни помежду си (*прости корени*);

II. корените са различни помежду си, но измежду тях има комплексни;

III. някои от корените са *кратни*.

Ще илюстрираме казаното дотук с хомогенно ДУ от втори ред:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (5.7)$$

където p и q са дадени константи.

Да отбележим, че в случая $n = 2$ решенията $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const.}$

Характеристичното уравнение на (5.7) е:

$$r^2 + pr + q = 0,$$

откъдето

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Първи случай: $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Тогава имаме два реални корена $r_1 \neq r_2$.

Решенията $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$ очевидно са линейно независими. Общото решение на диференциалното уравнение (5.7) е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Пример 5.2: $y'' - 5y' - 6y = 0$

Характеристичното уравнение

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

има решения $r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2}$, следователно $r_1 = 6$ и $r_2 = -1$.

Общото решение тогава е:

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример 5.3: $y''' + 2y'' - 3y' = 0$

Характеристичното уравнение

$$r^3 + 2r^2 - 3r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r^2 + 2r - 3) = 0$$

има решения $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$, т.е. $r_2 = 1$ и $r_3 = -3$.

Тогава фундаменталната система от решения е

$$y_1 = e^{0x} = e^0 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-3x}$$

и за общото решение получаваме:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-3x}.$$

Втори случай: $\Delta = p^2 - 4q = 0$. Тогава коренът е реален, двукратен: $r = r_{1,2} = -\frac{p}{2}$.

Едното решение е $y_1 = e^{rx}$.

За да бъдат двете решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независими, другото решение y_2 ще търсим във вида:

$$y_2 = \varphi(x) e^{rx},$$

където $\varphi(x)$ е някаква (неизвестна) функция, тъй като тогава $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \varphi(x) \neq \text{const.}$

Функцията $\varphi(x)$ трябва да бъде такава, че y_2 да удовлетворява уравнението (5.7).
Намираме

$$y_2' = (\varphi(x) e^{rx})' = \varphi'(x) e^{rx} + r\varphi(x) e^{rx} = e^{rx}(\varphi'(x) + r\varphi(x));$$

и

$$\begin{aligned} y_2'' &= (e^{rx}(\varphi'(x) + r\varphi(x)))' \\ &= r e^{rx}(\varphi'(x) + r\varphi(x)) + e^{rx}(\varphi''(x) + r\varphi'(x)) = e^{rx}(\varphi''(x) + 2r\varphi'(x) + r^2\varphi(x)). \end{aligned}$$

Заместваме в (5.7):

$$e^{rx}(\varphi'' + 2r\varphi' + r^2\varphi) + pe^{rx}(\varphi' + r\varphi) + q\varphi e^{rx} = 0.$$

След като съкратим на e^{rx} , което е различно от 0 за всяко x , получаваме:

$$\varphi'' + (2r + p)\varphi' + (r^2 + pr + q)\varphi = 0.$$

Като отчетем, че r е решение на характеристичното уравнение и че $r = -\frac{p}{2}$, ще получим

$$\varphi''(x) = 0,$$

т.е. $\varphi(x)$ е (която и да е!) линейна функция от вида $\varphi(x) = ax + b$.

Да изберем $a = 1$ и $b = 0$. Тогава $y_2(x) = xe^{rx}$, като $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const.}$

Забележка 5.1 Когато редът на диференциалното уравнение е по-висок от втори, е възможно характеристичното уравнение да има корен с кратност, по-голяма от 2. Тогава за всяка следваща кратност в съответстващото решение се добавя по една единица в степента на x .

Пример 5.4: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Характеристичното уравнение е

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r + 1)^3 = 0.$$

Тогава $r = -1$ е 3-кратен характеристичен корен.

Общото решение е:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

Трети случай: $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Тогава корените са комплексни числа, при това комплексно спрегнати:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Като използваме, че

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

В последното равенство използвахме **формулата на Ойлер** (1707-1783).

Реалната и имагинерната част на функцията-решение също са решения (свойството *линейност*). При това $\frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} \neq \text{const.}$

Следователно можем да вземем $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Тогава общото решение на диференциалното уравнение (5.7) е:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 5.5: $y'' - 2y' + 10y = 0$

Характеристичното уравнение $r^2 - 2r + 10 = 0$ има корени

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Тогава $y_1 = e^x \cos 3x$ и $y_2 = e^x \sin 3x$ и общото решение на диференциалното уравнение е:

$$y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 5.6: $y'' + 9y = 0$

Характеристичното уравнение

$$r^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -9 = 9i^2$$

има корени (чисто имагинерни) $r_{1,2} = \pm 3i$.

Тъй като реалната част на характеристичните корени е 0, то във функциите, образуващи фундаментална система от решения, няма да фигурира експонента:

$$y_1 = \cos 3x, \quad y_2 = \sin 3x.$$

Общото решение на диференциалното уравнение е:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

5.4 Линејни нехомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Метод на Лагранж

Първо ще дискутираме структурата на общото решение на линейно нехомогенно диференциално уравнение (ЛНДУ):

$$L[y] = f(x). \tag{5.8}$$

Нека $\eta(x)$ е едно частно решение на (5.8). Ако $\eta_1(x)$ е друго частно решение на (5.8), то тяхната разлика $\eta - \eta_1$ е решение на хомогенното уравнение

$$L[y] = 0. \quad (5.9)$$

Действително:

$$L[\eta - \eta_1] = L[\eta] - L[\eta_1] = f(x) - f(x) = 0.$$

Ако $\eta(x)$ е едно (кое да е) частно решение на (5.8), а $Y(x)$ е общото решение на линейното хомогенно диференциално уравнение (ЛХДУ) (5.9), то

$$y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

е общото решение на ЛНДУ (5.8).

Тогава

$$L[y(x)] = L[Y(x) + \eta(x)] = L[Y(x)] + L[\eta(x)] = 0 + f(x) = f(x).$$

В общото решение се съдържат n на брой произволни константи заради общото решение $Y(x)$ на ЛХДУ (5.9).

Ако дясната страна е сбор от две функции:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$y_1(x)$ е решение на уравнението $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ е решение на $L[y] = f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ е решение на уравнението $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Това свойство наричаме **принцип на суперпозиция на решенията**. Този принцип е в сила и за сбор от повече от две функции.

Сега ще изложим метода на Лагранж, който приложихме за линейно ДУ от първи ред. За да бъде изложението по-ясно, ще разгледаме ЛНДУ от втори ред:

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (5.10)$$

Нека функцията

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

е общо решение на хомогенното уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (5.11)$$

Идеята на Лагранж е да варираме константите C_1 и C_2 , т.е. да ги заместим за момент с функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Това означава да търсим частно решение на (5.10) във вида

$$\eta(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

т.е. да търсим такива функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, че $\eta(x)$ да е решение на (5.10).

Диференцираме това равенство:

$$\eta' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'.$$

Първото условие, което ще наложим с цел да намерим функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, е

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \quad (5.12)$$

Ако (5.12) е изпълнено, то тогава $\eta' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$. Да намерим в такъв случай и втората производна на $\eta(x)$:

$$\eta'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''.$$

Заместваме $\eta(x)$, $\eta'(x)$ и $\eta''(x)$ в (5.10):

$$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + p(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x).$$

Групираме едночлените, съдържащи u_1 и тези, които съдържат u_2 :

$$u_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + u_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x).$$

Изразите в скобите са равни на 0, защото $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решения на хомогенното уравнение (5.11).

Така окончателно получаваме

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x),$$

което заедно с (5.12) дава следната система на Лагранж:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (5.13)$$

Нехомогенната система (5.13) има единствено решение, защото за детерминантата на Вронски е изпълнено

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

По-общо, за ЛНДУ от n -ти ред системата (5.13) с неизвестни $u_1', u_2', \dots, u_n'$ ще съдържа откъсно само нули с изключение на последното уравнение, което откъсно ще съдържа $f(x)$.

Методът на Лагранж има едно основно предимство: той е приложим за всяка дясна част $f(x)$. Недостатъкът е, че вместо функциите u_i , намираме техните производни u_i' , $i = 1, 2, \dots, n$. Следователно се налага да извършим допълнително n на брой интегрирания, за да стигнем до u_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Пример 5.7: $y'' + y = -\cot x$

Съответното хомогенно уравнение (уравнение на идеално махало)

$$y'' + y = 0$$

има решение $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Тогава търсим $\eta(x)$ във вида: $\eta(x) = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$.

Системата на Лагранж е:

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ u_1' \sin x - u_2' \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

От първото уравнение имаме $u_2' = -\frac{\cos x}{\sin x} u_1'$.

Тогава:

$$u_1' \left(\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Като се освободим от знаменателя, ще получим, че $u_1' = -\cos x$ и за $u_1(x)$ следва:

$$u_1 = \int \cos x \, dx = -\sin x.$$

Да отбележим, че няма нужда при интегрирането да се добавя произволна константа!

Съответно за u_2 имаме: $u_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \cos x$ и следователно

$$u_2 = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \, dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x \, dx,$$

откъдето

$$u_2 = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \cos x.$$

Като заместим, за частното решение $\eta(x)$ получаваме:

$$\eta(x) = -\sin x \cos x + \sin x \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \sin x \cos x = \sin x \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right).$$

Тогава общото решение на даденото нехомогенно диференциално уравнение е:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right).$$

Пример 5.8: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

Хомогенното уравнение $y'' - 2y' + y = 0$ има решение $Y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$ (защото характеристикните корени са $r_{1,2} = 1$).

В такъв случай $\eta(x)$ ще търсим във вида: $\eta(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$.
Системата на Лагранж е:

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' x e^x = 0 \\ u_1' e^x + u_2' (1+x) e^x = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Като извадим двете уравнения от системата, получаваме $u_2' e^x = \frac{e^x}{x}$, следователно $u_2' = \frac{1}{x}$.

Заместваме полученото за u_2' в първото уравнение от системата и получаваме, че $u_1' = -1$.

Тогава:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int dx = -x, \\ u_2 &= \int \frac{1}{x} dx = -\ln |x|, \end{aligned}$$

откъдето за частното решение $\eta(x)$ получаваме:

$$\eta(x) = -x e^x - x e^x \ln |x|.$$

И така, общото решение на нехомогенното диференциално уравнение е

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x - x e^x \ln |x| = e^x (C_1 + C_2 x - x - x \ln |x|).$$

5.5 Линејни нехомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти и особена дясна част

Диференциалното уравнение (5.8) е с **особена дясна част** $f(x)$, когато $f(x)$ е:

- I. алгебричен полином $P_n(x)$ от степен $n \in \mathbf{N}$;
- II. експоненциална функция $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, евентуално умножена с полином $P_n(x)$;
- III. тригонометричните функции $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$, $\beta \in \mathbf{R}$, евентуално умножени с полином $P_n(x)$ и/или експонента;
- IV. комбинация от трите изброени по-горе видове функции (съгласно *принципа за суперпозиция*).

Методът, който отчита вида на дясната част (в случай, че тя е от изброените по-горе видове) в повечето случаи е много по-лесен за прилагане, отколкото метода на Лагранж. Единственият недостатък е неговото ограничено приложение (само при дясна част от изброените видове).

Ще разгледаме поотделно всеки от трите случая на дясна част, при които методът е приложим. При всеки от тези три случая има по един *важен частен случай*, който на езика на техниката се нарича **резонанс**. При резонанс външното въздействие (дясната част!) е функция, която съвпада по вид с някои от функциите на формата, описващи **идеалната система** (без външно въздействие).

I. случай $f(x) = P_n(x)$ – алгебричен полином от степен n

Търсим частно решение $\eta(x)$ във вида

$$\eta(x) = Q_n(x),$$

където $Q_n(x)$ е отново полином от степен n , но с неизвестни коефициенти.

Да отбележим, че $Q_n(x)$ е пълен полином, т.е. в него фигурират всички степени на x до степен n включително!

Пример 5.9: $y'' + y = x^2 - 2$

Съответното хомогенно уравнение (Пример 5.7)

$$y'' + y = 0$$

има решение $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Търсим $\eta(x)$ във вида: $\eta(x) = ax^2 + bx + c$.

Коефициентите a, b и c трябва да са такива числа, че $\eta(x)$ да е решение на даденото нехомогенно уравнение.

Намираме първата и втората производна на $\eta(x)$:

$$\eta'(x) = 2ax + b, \quad \eta''(x) = 2a$$

и заместваме в диференциалното уравнение (y с η , както и y'' с η''):

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2 - 2.$$

Тук трябва да подчертаем, че методът на особената дясна част използва простото твърдение, според което два полинома са тъждествено равни тогава и само тогава, когато коефициентите им пред еднаквите степени са равни.

Така че сравняваме коефициентите пред съответните степени на x в двете страни на полученото тъждество:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad 2a + c = -2,$$

следователно за коефициентите на η получаваме $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$.

Тогава $\eta(x) = x^2 - 4$ и общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 4.$$

Важен частен случай е, когато числото 0 е корен на характеристичното уравнение. Ако този корен е от кратност k , то частното решение η търсим във вида

$$\eta(x) = x^k Q_n(x).$$

Трябва да подчертаем, че въвеждането на множител x^k в η е задължително от изчислителна гледна точка.

Пример 5.10: $y^{IV} + y'' = x^2 - 2$

Характеристичното уравнение е

$$r^4 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(r^2 + 1) = 0.$$

Корените му са $r_{1,2} = 0$ и $r_{3,4} = \pm i$, следователно съответното хомогенно уравнение

$$y^{IV} + y'' = 0$$

има общо решение $Y(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Търсим $\eta(x)$ във вида: $\eta(x) = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ (имаме двукратен характеристичен корен, равен на 0).

Намираме производните на $\eta(x)$ до четвърти ред включително (даденото уравнение е от четвърти ред):

$$\eta'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx, \quad \eta''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c, \quad \eta'''(x) = 24ax + 6b, \quad \eta^{IV}(x) = 24a$$

и замества в диференциалното уравнение:

$$24a + 12ax^2 + 6bx + 2c = x^2 - 2.$$

Сравняваме коефициентите пред съответните степени на x в двете страни на това равенство:

$$\left| \begin{array}{l} 12a = 1 \\ 6b = 0 \\ 24a + 2c = -2 \end{array} \right.$$

От тази система получаваме $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$, $c = -2$.

Тогава $\eta(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ и общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{12}x^4 - 2x^2.$$

II. случай $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$

Търсим частно решение $\eta(x)$ във вида

$$\eta(x) = Q_n(x) e^{\alpha x},$$

където $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ са полиноми от степен n както в предния случай.

В частния случай, при който числото α е k -кратен характеристичен корен, частно решение $\eta(x)$ търсим във вида

$$\eta(x) = x^k Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

Пример 5.11: $y'' + y' - 2y = 2xe^x$

Характеристичното уравнение

$$r^2 + r - 2 = 0$$

има корени $r_1 = 1$ и $r_2 = -2$, следователно общото решение на съответното хомогенно уравнение е:

$$Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Търсим $\eta(x)$ във вида: $\eta(x) = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$ (имаме еднократен характеристичен корен $r_1 = 1 = \alpha$, а полиномът в дясната част, с който експонентата $e^{\alpha x} = e^x$ е умножена, е от първа степен – равен на x).

Пресмятаме:

$$\eta'(x) = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x,$$

$$\eta''(x) = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x.$$

Заместваме в диференциалното уравнение и съкращаваме на e^x :

$$(ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x + (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x - 2(ax^2 + bx)e^x = 2xe^x,$$

$$ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b + ax^2 + 2ax + bx + b - 2ax^2 - 2bx = 2x,$$

откъдето след привеждане получаваме тъждество между два полинома:

$$6ax + 2a + 3b = 2x.$$

Сравняваме коефициентите в двете страни:

$$6a = 2, \quad 2a + 3b = 0,$$

следователно $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{9}$.

Така общото решение на даденото диференциално уравнение е:

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \right) e^x.$$

III. случай Дясната част $f(x)$ съдържа тригонометрична функция $\cos \beta x$ и/или $\sin \beta x$, като β е реален параметър.

Частно решение $\eta(x)$ търсим във вид на функция, в която задължително фигурират както $\cos \beta x$, така и $\sin \beta x$.

Ако дадената особена дясна част е

$$f(x) = P_{n_1}(x) \cos \beta x + P_{n_2}(x) \sin \beta x,$$

то

$$\eta(x) = Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x,$$

където $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ са неизвестни алгебрични полиноми от степен $n = \max\{n_1, n_2\}$.

Тук важен *частен случай* е, когато числото $i\beta$ е имагинерен корен от кратност k на характеристичното уравнение.

Тогава частно решение $\eta(x)$ трябва да се търси във вида

$$\eta(x) = x^k (Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x).$$

Пример 5.12: $y'' + y = \sin x$ (махало със синусоидално външно въздействие)

От Пример 5.7 знаем общото решение на съответното хомогенно диференциално уравнение $y'' + y = 0$:

$$Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

В този пример имаме $\beta = 1$. Тъй като числото $i\beta = i$ е еднократен характеристичен корен, то попадаме в частния случай, така че търсим $\eta(x)$ във вида:

$$\eta(x) = x(a \cos x + b \sin x).$$

За да намерим коефициентите a и b , диференцираме двукратно $\eta(x)$:

$$\eta'(x) = (a \cos x + b \sin x) + x(-a \sin x + b \cos x),$$

$$\eta''(x) = 2(-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x)$$

Заместваме y с η в диференциалното уравнение:

$$2(-a \sin x + b \cos x) + x(-a \cos x - b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x) = \sin x,$$

т.е.

$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x.$$

Нека да сравним коефициентите пред $\sin x$ и $\cos x$ в лявата и дясната страна на полученото тъждество: $-2a = 1$, $2b = 0$, откъдето $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ и за частното решение получаваме:

$$\eta(x) = -\frac{x}{2} \cos x.$$

Окончателно, общото решение на даденото нехомогенно уравнение е:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

Пример 5.13: $y'' - y = \cos 2x$

Хомогенното уравнение $y'' - y = 0$ има решение $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Частното решение $\eta(x)$ търсим като: $\eta(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$.

Диференцираме двукратно $\eta(x)$:

$$\eta'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x, \quad \eta''(x) = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x$$

и заместваем в диференциалното уравнение:

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x - (a \cos 2x + b \sin 2x) = \cos 2x,$$

т.е.

$$-5a \cos 2x - 5b \sin 2x = \cos 2x.$$

Сравняваме коефициентите пред $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в лявата и дясната страна на полученото тъждество: $-5a = 1$, $-5b = 0$, следователно $a = -\frac{1}{5}$, $b = 0$ и тогава частното решение $\eta(x)$ е:

$$\eta(x) = -\frac{x}{5} \cos 2x.$$

И така, за общото решение на даденото нехомогенно уравнение получаваме:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{x}{5} \cos 2x.$$

Всичко, казано дотук, е пронизано от важен принцип в линейните диференциални оператори, който е валиден в много съвременни инженерни приложения. И той е, че параметърът α в експонентата е носител на реалната част в представянето на една функция, а β характеризира нейната имагинерна част. Това се прилага и лесно се илюстрира с комплексните числа: $z = \alpha + i\beta$ и тогава

$$e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Това ни позволява да обобщим, като получим обединение на трите случая на особена дясна част:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_{n_1}(x) \cos \beta x + P_{n_2}(x) \sin \beta x)$$

и тогава частно решение $\eta(x)$ търсим като

$$\eta(x) = e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x),$$

където $n = \max\{n_1, n_2\}$.

Ако обаче числото $\alpha + i\beta$ е корен на характеристичното уравнение с кратност k , то видът на тръсеното частно решение трябва да бъде

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x).$$

Задачи за упражнение: Определете какъв е общият вид на частното решение за следните нехомогенни диференциални уравнения:

5.2. $y''' + y'' - 2y' = x^2 - 2x + 3$

5.3. $y'' + 5y' - 6y = xe^x$

5.4. $y'' + 5y' - 6y = xe^{-x}$

5.5. $y'' + 2y' + y = x \cos 2x - x^2 \sin 2x$

5.6. $y'' + y = e^x (\cos x - \sin x)$

Библиография

- [1] В. Грозданов, Математически анализ първа част., Университетско издателство „Неофит Рилски”, 2015.
- [2] Т. Д. Тодоров, Учебник по висша математика втора част, Второ издание, "ЕКС-ПРЕС 2023.
- [3] Т.Д. Тодоров, Учебник по висша математика трета част, "ЕКС-ПРЕС 2017.
- [4] Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисление, для ВТУ-зов, "Наука Москва, 1985.
- [5] C.L. Mett, J.C. Smith, Calculus with Applications, McGrew-Hill, New York, 1985.
- [6] A. Croft, R. Davison, Mathematics for Engineers, 5th edition, Pearson, 2020.