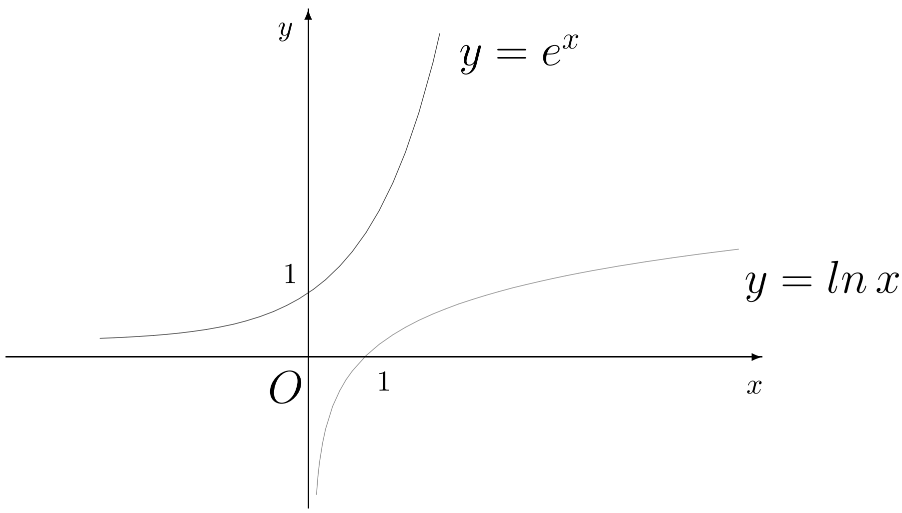
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ИКОНОМИКАТА И УПРАВЛЕНИЕТО



Габрово, 2014

__**Автори**__: Авторът е преподавател в катедра “Математика“ на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ “Св. Кл. Охридски“. Защитил е докторат в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ИКОНОМИКАТА И УПРАВЛЕНИЕТО,

Учебник за студенти от факултет “Стопански“ на ТУ-Габрово.

Първо издание, 83 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът "Количествени методи в икономиката и управлението" е предназначен за студенти от факултет "Стопански" на Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен "бакалавър".

Основна цел, която авторът си е поставил, е да се намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите икономисти и управленци като основен апарат за изучаване на общоикономическите и специални дисциплини. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с достатъчен брой примери и подробно решени задачи.

Включени са следните раздели: функция, граница на функция, производна на функция, приложение на производните, неопределен интеграл, определен интеграл и неговите приложения, обикновени диференциални уравнения с разделени променливи.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Броят на решените задачи и задачите за самостоятелна работа надхвърля 150. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти в задочна и дистанционна форма на обучение.

Април 2014 г. Авторът

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1 - Функция. Граница на функция 5
- Безкрайни числови редици 5
- Функция. Основни елементарни функции 7
- Граница на функция 11
- Непрекъснатост на функция 13

ГЛАВА 2 - Производна на функция 21
- Основни дефиниции и формули 21
- Производни от по-висок ред 25
- Диференциал 26
- Неопределени форми. Теореми на Лопитал 29

ГЛАВА 3 - Приложения на производните 33
- Монотонност и екстремум 33
- Изпъкналост и вдлъбнатост 39
- Асимптоти 42
- Приложение на производните в задачи от икономиката 44

ГЛАВА 4 - Неопределен интеграл 55
- Таблични интеграли 55
- Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала 56
- Интегриране чрез смяна на променливата 57
- Интегриране по части 58

ГЛАВА 5 - Определен интеграл. Приложения 61
- Дефиниция и свойства 61
- Пресмятане на определен интеграл. Формула на Лайбниц-Нютон 63
- Интегриране чрез смяна на променливата 64
- Интегриране по части 65
- Приложения на определен интеграл 67

ГЛАВА 6 - Обикновени диференциални уравнения 77
- Основни понятия и дефиниции 77
- Уравнения с разделени променливи 78

Глава 1

Функция. Граница на функция

I. Безкрайни числови редици

Дефиниция 1.1 *Казва се, че е дефинирана безкрайна* ***числова редица***

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots\ ,$$

ако на всяко естествено число n по определено правило е съпоставено число a_n.

Числата $a_1,\ a_2,\ \ldots$ се наричат **членове на редицата;** a_n се нарича **общ член** на редицата.

За числова редица ще използваме означението $\{a_n\}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена,** ако съществува краен и затворен интервал $[m, M]$, съдържащ всички членове на редицата, т.е. такъв, че за всяко n да бъде изпълнено $m < a_n < M$.

Известно е, че между реалните числа и точките от реалната права има взаимно-еднозначно съответствие. Поради тази причина ще отъждествяваме "числото a" с "точката a".

Дефиниция 1.2 ***Околност*** *на точката a наричаме всеки отворен интервал, съдържащ тази точка. Интервалът $(a - \varepsilon\,,\, a + \varepsilon)$ наричаме $\varepsilon-$**околност** на точката a.*

Условието $a_n \in (a - \varepsilon\,,\, a + \varepsilon)$ може да се запише по няколко начина:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon.$$

Дефиниция 1.3 *Числото a се нарича* ***граница на редицата*** *$\{a_n\}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Това се означава с $\lim\ a_n = a$ или $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \longrightarrow a$.

Редица, която има граница, се нарича **сходяща.** Редица, която не е сходяща, се нарича **разходяща.**

Теорема 1.1 *Всяка сходяща числова редица е ограничена.*

Доказателство: Според дефиниция 1.3, каквото и $\varepsilon > 0$ да изберем, на него съответства такова число N, че всички членове на редицата $\{a_n\}$ с индекс (номер) n по-голям от N, т.е. всички от известно място нататък, се намират в $\varepsilon-$околност на точката a. Следователно извън тази околност остават краен брой членове. Това означава, че можем да намерим числа m и M такива, че $m < a_n < M$ за всяко n. ■

Теорема 1.2 *Ако* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *и ако за всяко* n *имаме* $a_n \leq b_n$, *то* $a \leq b$.

Следващата теорема е известна като теорема (лема) /***за двамата полицаи***.

Теорема 1.3 *Ако* $\lim a_n = \lim b_n = l$ *и* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *за всяко* n, *то* $\lim c_n = l$.

Теорема 1.4 *Ако* $\lim a_n = a$ *и* $\lim b_n = b$, *то:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$
2. $\lim(a_n.b_n) = \lim a_n. \lim b_n = a.b$
3. *Ако* $b_n \neq 0$ *за всяко* n *и* $b \neq 0$, *то* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно растяща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно намаляваща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отгоре,** ако съществува такова число M, че за всяко n е изпълнено $a_n < M$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отдолу,** ако съществува такова число m, че за всяко n е изпълнено $m < a_n$.

Теорема 1.5 *Всяка монотонна и ограничена числова редица е сходяща.*

Теоремата можем да разделим на две твърдения:

1. Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща.
2. Всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.

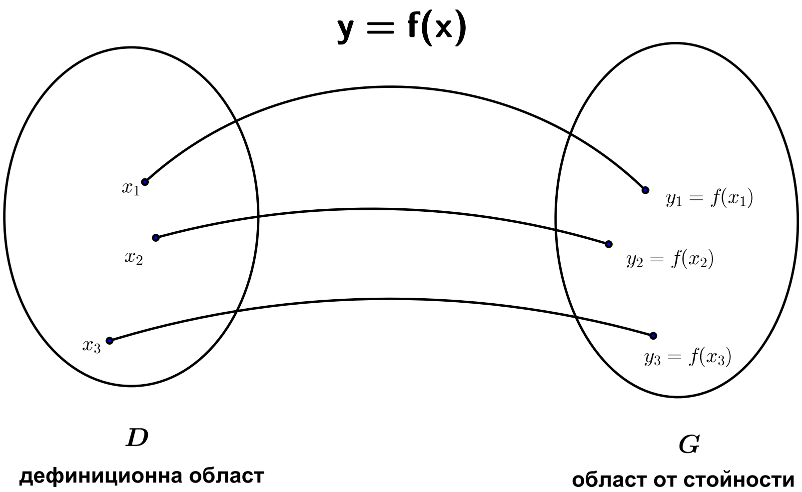
Теорема 1.6 *Ако* $\lim a_n = \pm\infty$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ *и обратно, ако* $\lim a_n = 0$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = \pm\infty$.

Теорема 1.7 *Границата на редицата с общ член* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *се бележи с буквата* **e** $\approx$ **2,7182** *и се нарича* ***Неперово число***

II. Функция

Понятието функционална зависимост е едно от основните понятия в математиката и играе главна роля в нейните приложения.

Дефиниция 1.4 *Нека D е числово множество и нека по определено правило на всяко число $x \in D$ е съпоставено по едно реално число $f(x)$. Тогава се казва, че в множеството D е зададена функция.*

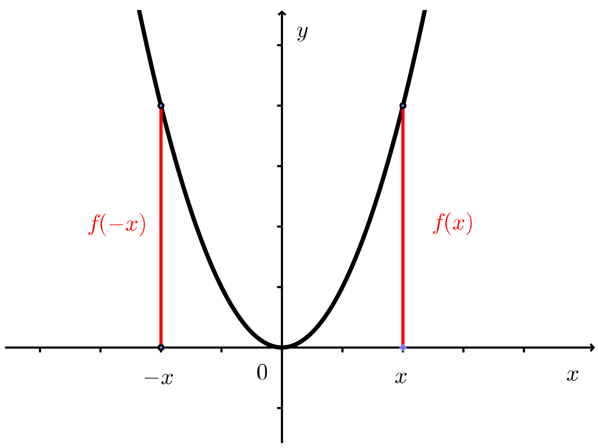


Най-често функцията означаваме с $y = f(x)$, където x е **аргумент** или **независима променлива**, а y е **зависимата променлива**.

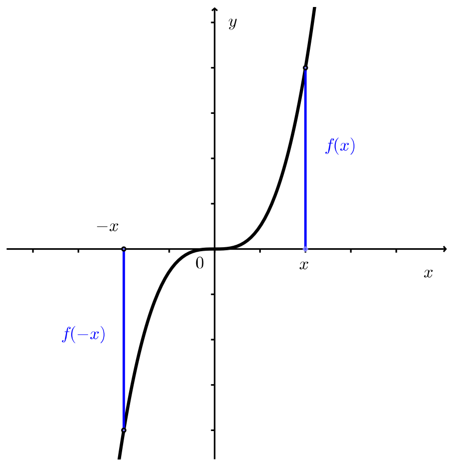
Множеството D се нарича **дефиниционно множество** или **дефиниционна област.** Множеството от всички стойности $y = f(x)$, $x \in D$, се нарича **област от стойности** на функцията или **образ** на множеството D.

Ако в равнината имаме правоъгълна координатна система Oxy, множеството от точки с координати $(x, f(x))$, $x \in D$, се нарича **графика** на функцията $y = f(x)$ или **крива** с уравнение $y = f(x)$.

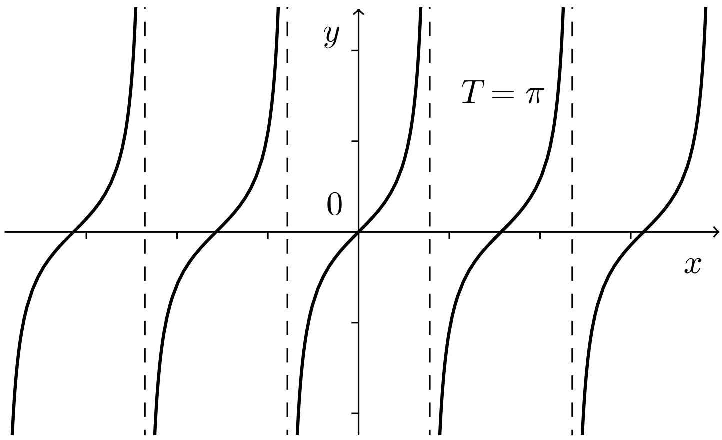
Функцията $y = f(x)$ се нарича **четна,** ако $f(-x) = f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно ординатната ос***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **нечетна,** ако $f(-x) = -f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно координатното начало***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **периодична,** ако $f(x+T) = f(x)$. Най-малкото положително число T с това свойство се нарича **период** на функцията.



Ако съществува число M, така че $|f(x)| < M$ за всяко $x \in D$, то функцията $f(x)$ се нарича **ограничена.** С други думи една функция е ограничена, ако нейното множество от функционални стойности е ограничено.

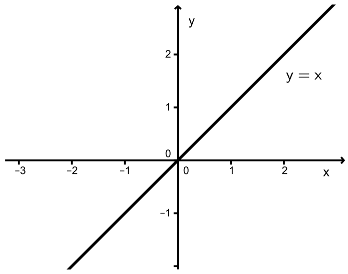
Функцията $f(x)$ се нарича **строго растяща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) < f(x_2)$. Функцията $f(x)$ се нарича **строго намаляваща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) > f(x_2)$.

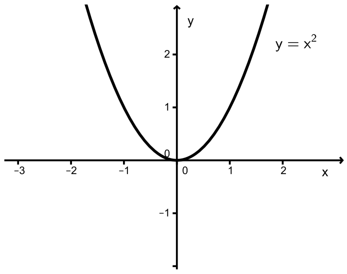
Следващите функции се изучават в училищния курс по математика и се наричат

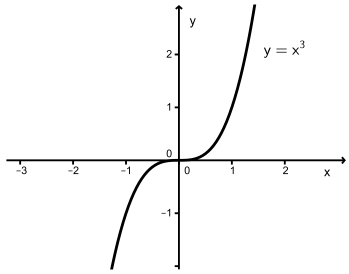
Основни елементарни функции

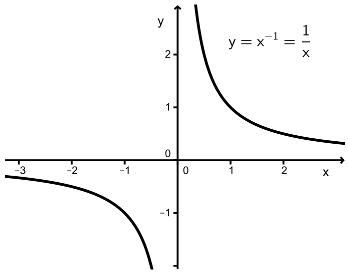
1. $y = x^\alpha$, $x > 0$, α- реално число	**степенна функция**
2. $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	**показателна функция**
3. $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$	**логаритмична функция**

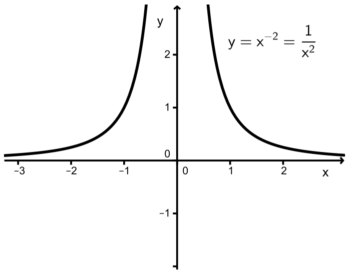
Графиките на тази страница са графики на основни елементарни функции.

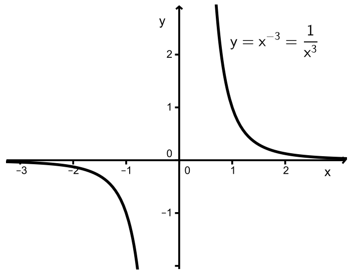


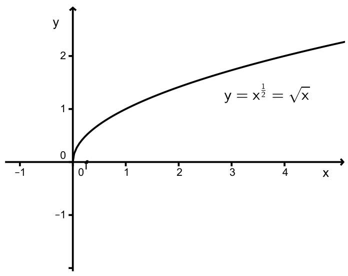


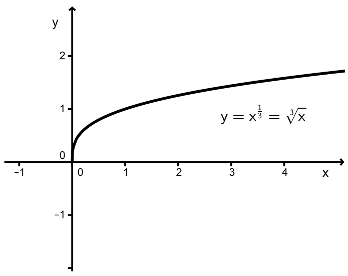


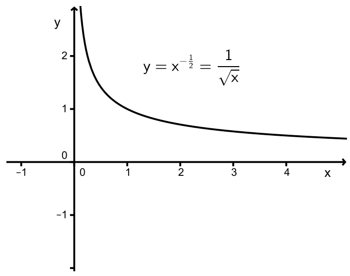


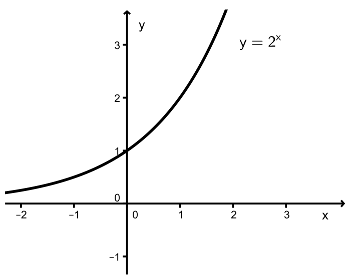


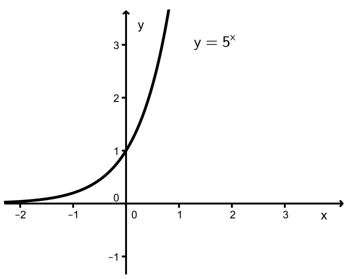


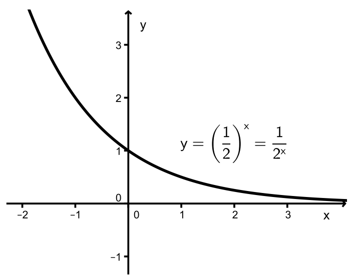


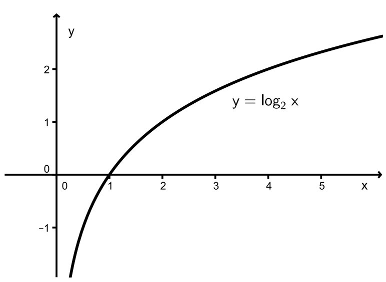


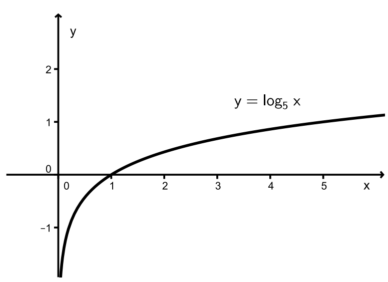


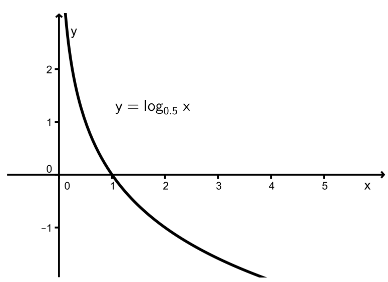






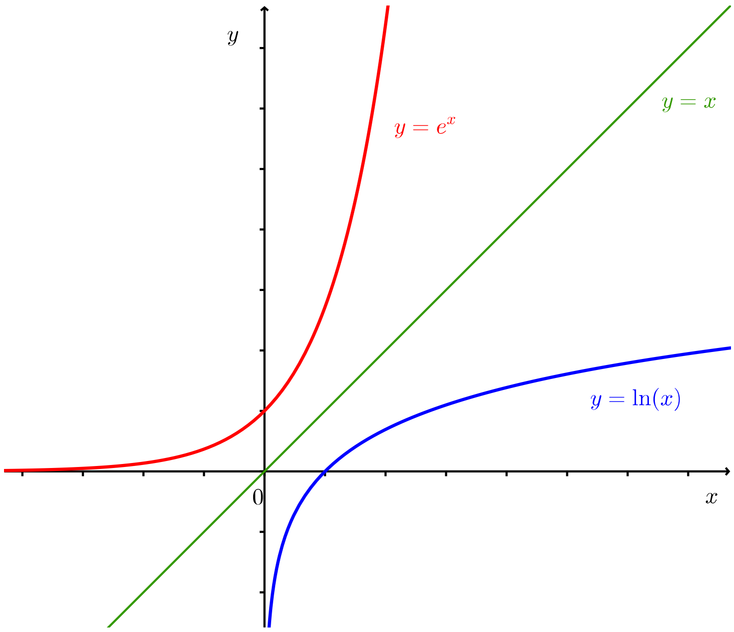






Ако $a = e$, то функцията $y = e^x$ се нарича **експоненциална функция**, а $y = \log_e x = \ln x$ се нарича **натурален логаритъм**.

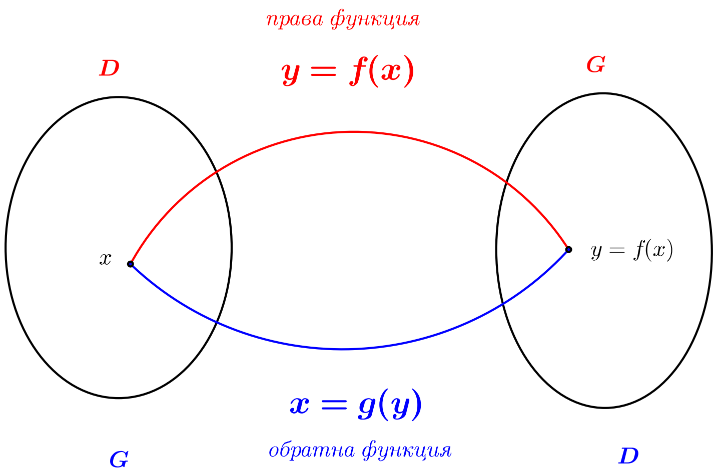
Графиките на двете функции са представени на следващата фигура.



Дефиниция 1.5 *Функцията $f(x)$ се нарича **обратима**, ако от неравенството $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. когато на различни стойности на аргумента съответстват различни стойности на функцията.*

Това условие, разбира се, не е изпълнено за всяка функция. Очевидно е обаче, че то е в сила за всяка строго растяща или строго намаляваща функция, т.е. строго растящите и строго намаляващите функции са обратими.

Дефиниция 1.6 *Нека функцията $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in M$ е обратима. Функцията $x = g(y)$, $y \in M$, $x \in D$, която на произволна стойност $y_0 \in M$ съпоставя онази стойност $x_0 \in D$, за която $f(x_0) = y_0$, се нарича **обратна** на функцията $y = f(x)$.*



От дефиницията виждаме, че областта от стойности на дадената функция служи за дефиниционна област на обратната функция, а дефиниционната област служи за област от стойности на обратната функция.

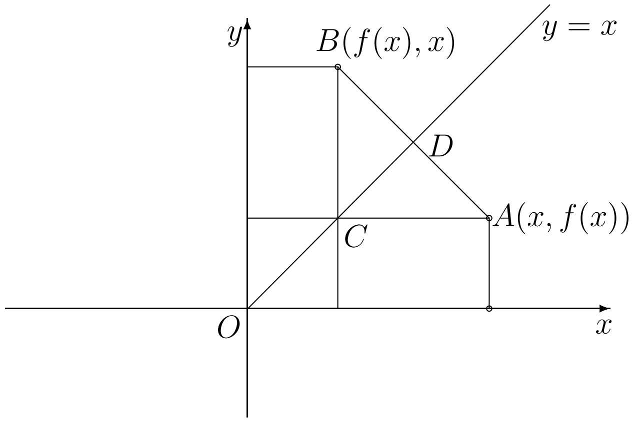
Обратната функция на $f(x)$ $(x \in D)$ се бележи с $f^{-1}(x)$ $(x \in M)$. Често двойката функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ се наричат права и обратна функции.

Очевидно е, че са в сила следните равенства:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in M \qquad \text{и} \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D.$$

Графиките на двете функции (права и обратна) са симетрични спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант. Лесно е да се убедим в това чрез следващия чертеж.

Наистина, нека точка $A(x, f(x))$ лежи на графиката на правата функция $f(x)$. Тогава точка $B(f(x), x)$ лежи на графиката на обратната функция. Вижда се, че $\triangle$ABC е правоъгълен и равнобедрен. Тогава CD е ъглополовяща, височина и медиана. Следователно $AD = BD$.



Пример: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[0, \infty)$. Тъй като функцията е строго растяща, тя е обратима и нейната обратна е $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Наистина, функцията $\sqrt{x}$ е дефинирана в интервала $[0, \infty)$ (областта от стойности на x^2 е същият интервал) и $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ и $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$.

Пример: Експоненциалната функция и натуралният логаритъм са взаимно обратни функции. Наистина, дефиниционната област на функцията e^x и областта от стойности на $\ln(x)$ е интервалът $(-\infty, \infty)$, а дефиниционната област на функцията $\ln(x)$ и областта от стойности на e^x е интервалът $(0, \infty)$. Освен това $f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$ и $f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x$.

Дефиниция 1.7 *Ако $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то функцията $F(x) = f(\varphi(x))$ се нарича* ***съставна функция, сложна функция*** *или* ***функция от функция****.*

Дефиниция 1.8 ***Елементарни функции*** *ще наричаме функциите, които се получават от основните елементарни функции и операциите събиране, изваждане, умножение, деление и функция от функция.*

ЗАДАЧИ

1.1 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 2|x| - 10}}$.

Решение: Знаменателят не може да бъде нула, а изразът под корена трябва да бъде неотрицателен. Следователно функцията е дефинирана, когато

$$3x - 2|x| - 10 > 0.$$

Решаваме това неравенство. Тъй като в израза участва $|x|$, ще разгледаме два случая.

1. Ако $x \in (-\infty, 0)$, то $|x| = -x$ и получаваме неравенство

$$5x - 10 > 0, \quad \text{т.е.} \quad x \in (2, +\infty).$$

Но $x < 0$ и следователно в този случай неравенството няма решение.

2. Ако $x \in [0, +\infty)$, то $|x| = x$ и получаваме неравенството $x - 10 > 0$, т.е $x \in (10, +\infty)$.

Обединяваме резултатите от двата случая и получаваме, че дефиниционната област на функцията е интервала $(10, +\infty)$.

1.2 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \ln(5 - 2x)$.

Решение: Логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно дефиниционната област се определя от условието $5 - 2x > 0$, т.е. $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$.

1.3 Да се установи дали е четна или нечетна функцията $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Решение: Имаме:

$$y(-x) = \ln\left(\sqrt{1 + (-x)^2} - x\right) = \ln \frac{\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = -\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -y(x).$$

Следователно функцията е нечетна.

III. Граница на функция. Непрекъснатост

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, като в самата точка може и да не е дефинирана.

Дефиниция 1.9 ***(Коши)*** *Числото A се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$ при x, клонящо към x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число $\delta > 0$, че за всяко x, за което $0 < |x - x_0| < \delta$ да бъде изпълнено*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означаваме по следния начин:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Основното в горната дефиниция е, че всеки избор на $\varepsilon > 0$ определя такова число $\delta > 0$, че когато $x \neq x_0$ и принадлежи на δ-околност на точката x_0, стойностите на функцията принадлежат на ε-околност на числото A.

Дефиниция 1.10 ***(Хайне)*** *Числото A се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$ при $x \to x_0$, ако при всеки избор на числова редица $\{x_n\} \to x_0$ съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\} \to A$.*

Може да се докаже, че дефинициите на Хайне и Коши са еквивалентни.

Ако x клони към x_0 със стойности по-малки от x_0, то границата се нарича **лява,** а ако x клони към x_0 със стойности по-големи от x_0, границата се нарича **дясна.**

Левите и десни граници ще означаваме съответно с:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Равенството $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ е еквивалентно с $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал от вида $(a, +\infty)$.

Дефиниция 1.11 *Казваме, че A е граница на функцията $f(x)$, когато x клони към $+\infty$, ако при всеки избор на $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число K, че за всяко $x > K$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записваме по следния начин:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

Аналогични дефиниции се дават и за границите

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{и др.}$$

Теорема 1.8 *Нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. *Тогава в околност на точката* x_0 *функцията* $f(x)$ *е ограничена.*

Теорема 1.9 *Нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *в околност на* x_0. *Тогава* $A \leq B$.

Доказателство: Прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на разглежданата околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq g(x_n)$. Прилагаме Теорема 1.2 и получаваме $A \leq B$. ■

Теорема 1.10 *Нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ *и* $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ *в околност на* x_0. *Тогава* $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Доказателство: Отново прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на дадената околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq g(x_n)$. Сега прилагаме Теорема 1.3 и получаваме $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$. ■

Теорема 1.11 *Ако*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ f(x) \pm g(x)\ ] = A \pm B$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ \alpha f(x)\ ] = \alpha A$,

3. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ f(x).g(x)\ ] = A.B$,

4. *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ *и* $g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Верността на тези твърдения следва от дефиницията на Хайне и Теорема 1.4. ■

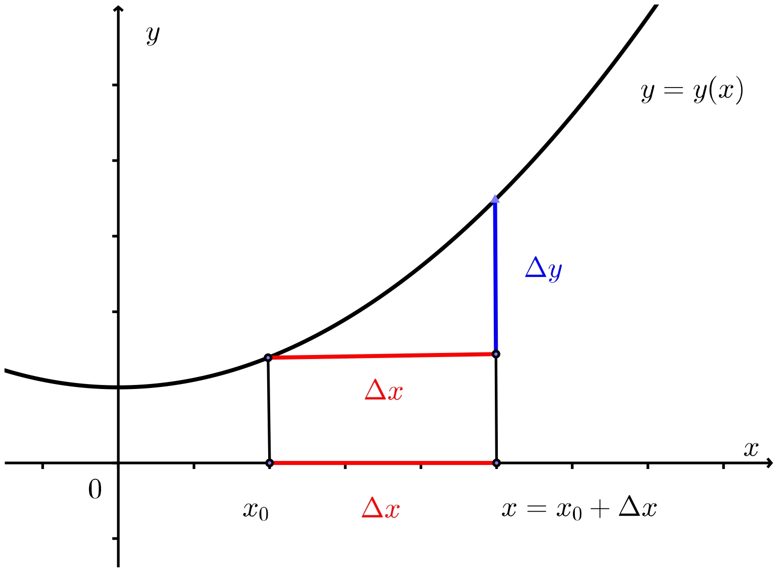
Някои основни граници

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \quad (a > 0)$

Нека x_0 и x са точки от дефиниционната област на функцията $y = f(x)$. Разликата $\Delta x = x - x_0$, която може да бъде положително или отрицателно число, наричаме **нарастване на аргумента**, а

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

наричаме **нарастване на функцията** в точката x_0, съответстващо на Δx.



Дефиниция 1.12 *Казваме, че функцията $y = f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, когато на безкрайно малко нарастване на аргумента отговаря безкрайно малко нарастване на функцията, т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{1.1}$$

Очевидно е, че $\Delta x \to 0 \iff x \to x_0$ и равенството (1.1) можем да запишем по следния начин:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Следователно от дефиниция (1.14) получаваме

Дефиниция 1.13 *Казваме, че функцията $y = f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, ако тя има граница при $x \to x_0$ и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.2}$$

Ако в горната дефиниция оставим x да клони към x_0 със стойности по-големи (по-малки) от x_0, получаваме дефиниция за непрекъснатост на функция **отдясно (отляво).** Чрез тези дефиниции равенство (1.2) добива вида

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x). \tag{1.3}$$

Точките, в които равенството (1.3) е нарушено, се наричат **точки на прекъсване.**

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ съществуват, но равенството (1.3) не е изпълнено, то очевидно функцията не е непрекъсната в точката x_0. Точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от първи род**.

Точка на прекъсване от първи род, за която $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ се нарича **отстранима точка на прекъсване**.

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не съществуват или някоя от тези граници е безкрайност, точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от втори род**.

Теорема 1.12 *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в дадена точка x_0, то и функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x).g(x)$, а в случая когато $g(x_0) \neq 0$, и функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ са непрекъснати в тази точка.*

Теорема 1.13 *Нека функцията $y = f(u)$ е непрекъсната в точката u_0, функцията $u = \varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогава сложната функция $F(x) = f(\varphi(x))$ е непрекъсната в точката x_0, т.е. непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната функция.*

Доказателство: От това, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0 следва, че $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. когато $x \to x_0$, то $u \to u_0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0)$$

■

Следващата теорема показва, че ако една функция е непрекъсната в точката x_0, то в околност на тази точка тя запазва своя знак.

Теорема 1.14 *Нека $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Тогава:*
1. Ако $f(x_0) > 0$, то съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че $f(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.
2. Ако $f(x_0) < 0$, то съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че $f(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично. От дефиницията на Коши имаме

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0, \quad \text{такова че} \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \text{е изпълнено}$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Нека изберем $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Тогава за всяко x от съответната на този избор на ε околност ще бъде изпълнено

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

■

Теорема 1.15 *Основните елементарни функции са непрекъснати във всяка точка от техните дефиниционни области.*

ЗАДАЧИ

1.4 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2x-5}{x^2+2x-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2x-5}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\boxed{\frac{3}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}-\boxed{\frac{5}{x^3}}^{\nearrow 0}\right)}{1+\boxed{\frac{2}{x}}_{\searrow 0}-\boxed{\frac{1}{x^2}}_{\searrow 0}}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty$$

1.5 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2+2x-3}{x^4-x^2+2x-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2+2x-3}{x^4-x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\boxed{\frac{5}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}-\boxed{\frac{3}{x^3}}^{\nearrow 0}}{x\left(1-\boxed{\frac{1}{x^2}}_{\searrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^3}}_{\searrow 0}-\boxed{\frac{1}{x^4}}_{\searrow 0}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

1.6 Да се намери

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}$$

1.7 Да се намери

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

1.8 Да се намери

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$$

1.9 Да се намери

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

1.10 Да се намери

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+x+x^2}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt{1-x-x^2}}=\frac{1}{2}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на функциите:

1.11 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 3x^4 - x + 1}$ Отг. $\dfrac{5}{3}$

1.12 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 8x - 1}{3x^4 + 5x^3 - x + 1}$ Отг. 0

1.13 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 1}{2x^4 + 11x^3 - x^2 + 1}$ Отг. $+\infty$

1.14 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 5x + 1}{2x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 3}$ Отг. $-\infty$

1.15 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4 - 5x^3 - 7x^5 - 2x + 15}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1}$ Отг. $+\infty$

1.16 $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}$ Отг. $\dfrac{1}{6}$

1.17 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{5 - x^2} - 2}{1 - x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

1.18 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x})$ Отг. 0

1.19 $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x - 1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

1.20 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

1.21 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ Отг. $-\infty$

1.22 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ Отг. $\dfrac{7}{3}$

1.23 $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}$ Отг. $+\infty$

1.24 $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}$ Отг. $-\infty$

1.25 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

1.26 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ Отг. $\dfrac{1}{6}$

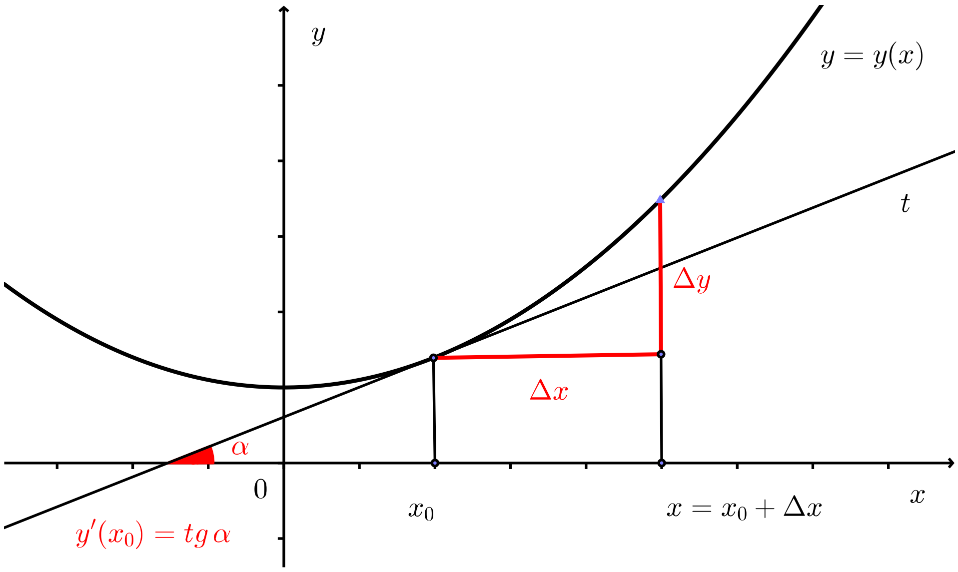
1.27 $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4}\right)$ Отг. $+\infty$

1.28 $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x^2-4}\right)$ Отг. $-\infty$

Глава 2

Производна на функция

Основни дефиниции и формули



Дефиниция 2.1 *Нека функцията $y = y(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0. Образуваме отношението (т.н.* ***диференциално отношение****)*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Границата на това отношение при $\Delta x \to 0$ (ако съществува) се нарича ***производна*** *на функцията $y(x)$ в точката x_0. Означаваме я с $y'(x_0)$, т.е.*

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Функция, която има производна в дадена точка, се нарича **диференцируема.**

За функцията $y(x) = x^2$, например, във всяка точка x имаме

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Ако $\Delta x \to 0$ с отрицателни стойности, производната се нарича **лява**, а ако $\Delta x \to 0$ с положителни стойности, производната се нарича **дясна**, т.е.

$$y'_{\text{Л}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'_{\text{Д}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Очевидно е, че една функция е диференцируема в точката x_0 , ако

$$y'_{\text{Л}}(x_0) = y'_{\text{Д}}(x_0) = y'(x_0)$$

Отношението $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$ е равно на тангенса на ъгъла, който секущата през точките с координати $(x, y(x))$ и $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на абсцисната ос. Когато $\Delta x \to 0$, т.е. $x \to x_0$, секущата става допирателна (тангента) към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$.

Следователно **геометричното значение на производната** на функцията в точката x_0 е, че тя е равна на тангенса на ъгъла α, който тангентата към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на оста x, т.е.

$$y\,'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Следователно уравнението на допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0) = y_0)$ е

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Теорема 2.1 *Ако функцията $y = y(x)$ има производна в точката x, то тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = y'(x). \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

Нека

$$y = F(x), \quad u = u(x) \;\text{ и }\; v = v(x)$$

са диференцируеми функции, а C е константа.

Основни правила за диференциране

1. $(C.u)' = C.u'$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(u.v)' = u'.v + u.v'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

5. $[F(u(x))]' = F'_u.u'_x = F'(u(x)).u'(x)$

Производни на основните елементарни функции

1. $(c)' = 0, \qquad x' = 1$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x.\ln a$

$(e^x)' = e^x$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

ЗАДАЧИ

2.1 Да се докаже, че функцията $f(x) = |x|$ няма производна в точката $x_0 = 0$.

Решение:
Образуваме диференциалното отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Ако $\Delta x > 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, но ако $\Delta x < 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$.

Това означава, че $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ няма граница при $\Delta x \to 0$,

т.е. $f(x) = |x|$ няма производна в разглежданата точка.

2.2 Да се намери производната на функцията

$$y = 4x^5 + 2x^2 - \sqrt{x} + \ln x$$

Решение:

$$y' = 20x^4 + 4x - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{x} = 20x^4 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

2.3 Да се намери производната на функцията

$$y = \frac{x^7 - 2x^3}{x - 1}$$

Решение:

$$y' = \frac{(x^7 - 2x^3)'(x-1) - (x^7 - 2x^3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(7x^6 - 6x^2)(x-1) - (x^7 - 2x^3)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^7 - 7x^6 - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(6x^5 - 7x^4 - 4x + 6)}{(x-1)^2}$$

В разгледаните до момента примери не беше използвана формула (5), известна като формула за намиране производната на сложна функция. Прилагането на тази формула изисква първо на функцията $u(x)$ да гледаме като на аргумент u и след като намерим производната на $F(u)$, да я умножим с производната на $u(x)$.

2.4 Да се намери производната на функцията $y = e^{3x^2}$.

Решение: Да означим $u(x) = 3x^2$. Тогава $y = F(u) = e^u$ и

$$y' = e^u.u' = e^u.(3x^2)' = 6x.e^{3x^2}$$

2.5 Да се намери производната на функцията $y = \ln(x^3 + 2x^2 + 1)$

Решение: Да означим $u(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Тогава $y = F(u) = \ln u$, т.е. y е сложна функция.

Чрез формулата за производна на сложна функция получаваме

$$y' = F'(u(x)).u'(x) = \frac{1}{u} \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

2.6 Да се намери производната на функцията

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 7})$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 7}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 7})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 7}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}$$

Производни от по-висок ред

Нека функцията $y(x)$ има производна $y'(x)$ във всяка точка от интервала (a, b). Тази производна е отново функция на x и може в интервала (a, b) да има своя производна, която се нарича втора производна (производна от втори ред) на $y(x)$. Означаваме я с $y''(x)$ или $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Изобщо, първата производна на производната от ред $(n - 1)$ се нарича n-та производна. Записваме

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$$

2.7 Намерете $y^{(n)}$ на функцията $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение: Последователно получаваме

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{2}{x^3}; \quad y''' = \frac{-2.3}{x^4}; \quad y^{IV} = \frac{2.3.4}{x^5}$$

Това е достатъчно за да направим предположение, че

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n \, n!}{x^{n+1}}$$

Тази формула лесно се доказва по индукция.

Диференциал на функция

Нека функцията $y = y(x)$ има производна в точката x_0. Лесно може да се покаже, че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

Следователно

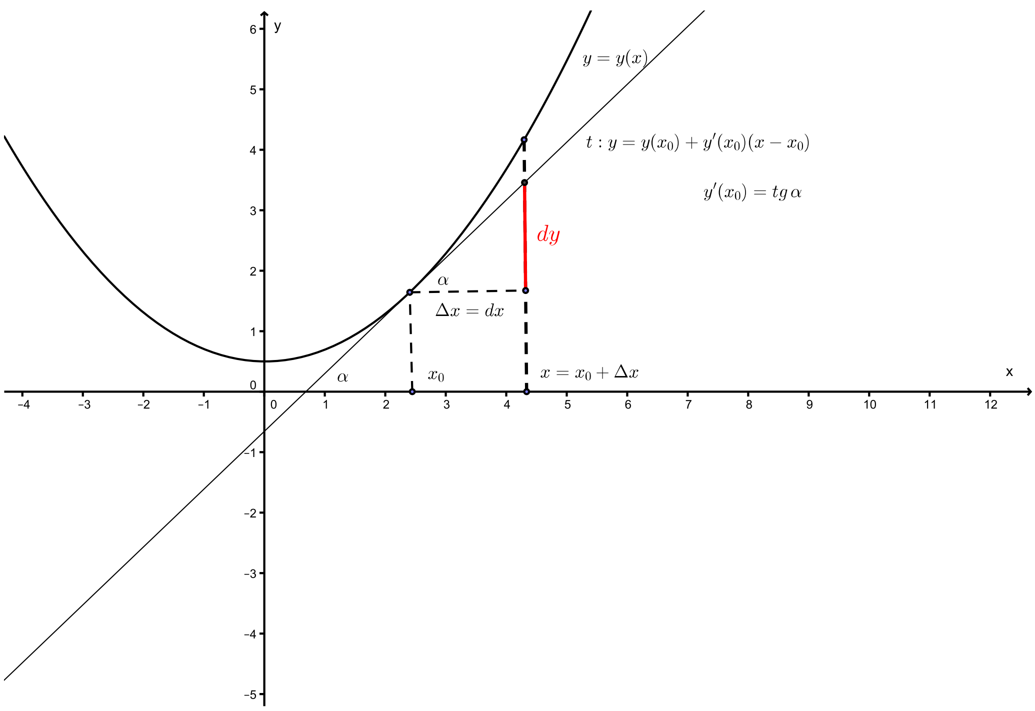
$$\Delta y = \ y'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$$

Първото събираемо $y'(x_0)\Delta x$ се нарича **диференциал** на функцията $y(x)$ в точката x_0 и се означава с $\mathrm{d}y$.

Диференциалът $\mathrm{d}x$ на независимата променлива x е равен на нарастването Δx. Следователно

$$\mathrm{d}y = y'(x)\ \mathrm{d}x, \qquad \text{а} \qquad y'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

От следващия чертеж се вижда, че диференциалът е равен на частта от нарастването на функцията, която е под допирателната.



2.8 Да се намери диференциалът на функцията $y(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Решение:

$$y'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят производните на функциите:

2.9 $y(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 1$ Отг. $y' = 15x^4 - 6x^2 + 2x$

2.10 $y(x) = 2x^{10} + 7x^4 - x - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{x^2}$ Отг. $y' = 20x^9 + 28x^3 - 1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$

2.11 $y(x) = \dfrac{2x^7 - x^2 - 10}{x}$ Отг. $y' = 12x^5 - 1 + \dfrac{10}{x^2}$

2.12 $y(x) = x^8 - 3x^2 + 5.2^x - 3e^x + 3$ Отг. $y' = 8x^7 - 6x + 5\ln 2.2^x - 3e^x$

2.13 $y(x) = x^6 - e^{4x} + 3\ln x$ Отг. $y' = 6x^5 - 4e^{4x} + \dfrac{3}{x}$

2.14 $y(x) = \dfrac{x^6 - 4x^3 - 1 + x^2.\ln(3x^3)}{x^2}$ Отг. $y' = 4x^3 - 4 + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x}$

2.15 $y(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ Отг. $y' = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

2.16 $y(x) = 9\sqrt[3]{x^2} - 2x$ Отг. $y' = \dfrac{2(3-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$

2.17 $y(x) = (3x^2 - x - 1).e^{x^3}$ Отг. $y' = (9x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 1).e^{x^3}$

2.18 $y(x) = (x^4 - 1).\ln(x^2 - 1)$ Отг. $y' = 4x^3.\ln(x^2 - 1) + 2x(x^2 + 1)$

2.19 $y(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x + 1}$ Отг. $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$

2.20 $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^{3x}}$ Отг. $y' = \dfrac{3 + 2x - 3x^2}{e^{3x}}$

2.21 $y(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2 + 1}$ Отг. $y' = \dfrac{2x^3.e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}$

2.22 $y(x) = \ln^2(x^3 - 1)$ Отг. $y' = \dfrac{6x^2}{x^3 - 1}. \ln(x^3 - 1)$

2.23 $y(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ Отг. $y' = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 1}}$

2.24 $y(x) = x.\sqrt{x^2 - 1}$ Отг. $y' = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2.25 $y(x) = x + \ln(x^2 - 4)$ Отг. $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$

Да се намерят вторите производни на функциите:

2.26 $y(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 1$ Отг. $y'' = 12(x^2 - x + 1)$

2.27 $y(x) = x^2 + 2 \ln x$ Отг. $y'' = \dfrac{2(x^2 - 1)}{x^2}$

2.28 $y(x) = \dfrac{x - 1}{e^x}$ Отг. $y'' = \dfrac{x - 3}{e^x}$

2.29 $y(x) = x.e^{x^2}$ Отг. $y'' = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2}$

2.30 $y(x) = \sqrt{x + 1}$ Отг. $y'' = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x + 1)^3}}$

Неопределени форми. Теореми на Лопитал

Както вече добре знаем, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Ако обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ казваме, че имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{0}{0}$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Когато обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, казваме, че имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Тези две неопределености ще наричаме **основни неопределени форми**. За тях е в сила следната теорема:

Теорема 2.2 *(**Правило на Лопитал**) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката x_0, с евентуално изключение на самата точка x_0, $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ в тази околност и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теоремите остават в сила и когато $x \to \infty$.

В теоремите се твърди, че от съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ следва съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Обратното не е вярно, т.е. може $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ да съществува, а $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ да не съществува. С други думи, от това че $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не съществува, не можем да правим изводи за $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ако след прилагането на теоремите на Лопитал получим пак неопределеност, то очевидно е че пак можем да ги приложим, т.е blue теоремите могат да се прилагат няколко пъти последователно.

Освен основните неопределени форми има и неопределени форми от вида $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Първите две, $0.\infty$ и $\infty-\infty$, се свеждат към основните чрез алгебрични преобразования.

- Неопределеност $0.\infty$ имаме, когато търсим граница от вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ и $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тази неопределеност може да се сведе до $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ по следния начин: Ако преобразуваме

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},\qquad \text{получаваме първата основна неопределеност } \frac{0}{0},$$

а преобразувайки

$$f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},\qquad \text{получаваме втората основна неопределеност } \frac{\infty}{\infty}.$$

- Случаите 0^0, ∞^0 и 1^∞ се свеждат до $0.\infty$ чрез логаритмуване.

ЗАДАЧИ

2.31 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. По правилото на Лопитал получаваме:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{2x}=-\frac{3}{2}$$

2.32 Да се намери $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-4}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-5}{2x}=\frac{11}{4}$$

2.33 Да се намери $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+3x^2-4x-4}{2x^3+5x^2-4x-12}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+3x^2-4x-4}{2x^3+5x^2-4x-12}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to -2}\frac{4x^3+12x^2+6x-4}{6x^2+10x-4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to -2}\frac{12x^2+24x+6}{12x+10}=-\frac{3}{7}$$

2.34 Да се намери $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+x^2-1}{e^x}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. По правилото на Лопитал получаваме:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+x^2-1}{e^x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x}{e^x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{6x+2}{e^x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}0$$

2.35 Да се намери $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. По правилото на Лопитал образуваме отношението $\dfrac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{3x^2}=\dfrac{2\ln x}{3x^3}$, което отново представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пак прилагаме правилото на Лопитал и получаваме отношението $\dfrac{2}{9x^3}$, което има граница нула при $x\to +\infty$. Следователно

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=0$$

Решението може да се запише накратко по следния начин:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln x}{3x^3}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\frac{2}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{3x^3}=0$$

2.36 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{e^x}{e^x-e}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{e^x(x-1)} = \frac{1}{e}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{x-1} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{1}{e}\lim_{x\to 1^+} e^x = 1$$

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на функциите:

2.37 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-8}$ Отг. $\dfrac{11}{12}$

2.38 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3-15x+4}{x^2-x-20}$ Отг. $-\dfrac{11}{3}$

2.39 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^5-3x^4+5x^3-7x^2+6x-2}$ Отг. 1

2.40 $\lim\limits_{x\to 0^+} x.e^{\frac{1}{x}}$ Отг. $+\infty$

2.41 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x.\ln x}{x^2+2x+2}$ Отг. 0

2.42 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^3+2x^2-1}$ Отг. $+\infty$

Глава 3

Приложение на производните

Монотонност и екстремум на функция

Дефиниция 3.1 *Функцията $y = y(x)$ се нарича* ***растяща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две числа x_1 и x_2, такива че $a < x_1 < x_2 < b$, е вярно $y(x_1) \leq y(x_2)$. Функцията $y = y(x)$ се нарича* ***намаляваща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две числа x_1 и x_2, такива че $a < x_1 < x_2 < b$, е вярно $y(x_1) \geq y(x_2)$.*

Ако една функция е растяща (намаляваща) в даден интервал, тя се нарича **монотонна**.

Нека $y(x)$ е растяща функция. Да вземем точките x и $x + \Delta x$. Ако $\Delta x > 0$, то $x < x + \Delta x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \geq 0$. Ако $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0$. Следователно и в двата случая

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Вярно е и обратното: ако $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, то функцията $y(x)$ е растяща. Следователно

$$\boxed{y(x) \quad \text{е растяща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0}$$

Аналогично

$$\boxed{y(x) \quad \text{е намаляваща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0}$$

Теорема 3.1 (*Теорема на Лагранж*) *Нека функцията $f(x)$ е:*

- непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$,

- диференцируема в отворения интервал (a, b).

Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Теорема 3.2 *Нека функцията $y(x)$ е диференцируема в интервала (a,b). Тогава:*

1. $y(x)$ *е* ***растяща*** *в този интервал* $\iff$ $y'(x) \geq 0$

2. $y(x)$ *е* ***намаляваща*** *в този интервал* $\iff$ $y'(x) \leq 0$

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

“$\Longrightarrow$“ Нека $y(x)$ е растяща в интервала (a,b). Тогава $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

“$\Longleftarrow$“ Нека $y'(x) \geq 0$ в интервала (a,b). За точките x и $x + \Delta x$, вътрешни за интервала (a,b), прилагаме теоремата на Лагранж.

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{x + \Delta x - x} = y'(c), \qquad c \in (x, x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(c) \geq 0$$

Следователно $y(x)$ е растяща в интервала (a,b). ■

От теорема 3.2 лесно следва верността на следващата теорема.

Теорема 3.3 *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в някоя околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0, и е диференцируема в тази околност, с евентуално изключение на точката x_0. Нека за точките x от същата околност $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогава в точката x_0 функцията има локален максимум.*

Теоремата е едно достатъчно условие за локален екстремум на функцията $f(x)$ в точката x_0. При това в самата точка x_0 функцията може да няма производна.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0.

Дефиниция 3.2 *Функцията $f(x)$ има* ***локален максимум*** *в точката x_0, ако съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за всяка точка от която е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$, т.е. $\Delta f \leq 0$.*

Дефиниция 3.3 *Функцията $f(x)$ има (**локален минимум**) в точката x_0, ако съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за всяка точка от която е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$, т.е. $\Delta f \geq 0$.*

Точките на локални минимуми и локални максимуми се наричат точки на **локални екстремуми.**

Теорема 3.4 *(**Теорема на Ферма**) Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и има локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказателство: Да приемем, че функцията има локален максимум в точката x_0.

Ако $x = x_0 + \Delta x$ е произволна точка от околността $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за нарастването на функцията имаме

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0.$$

Да разгледаме лявата и дясната производни в точката x_0. Имаме съответно:

$$f'_{\text{Л}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x < 0$$

$$f'_{\text{Д}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x > 0$$

Но функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и това означава, че лявата производна трябва да е равна на дясната производна. Това е възможно само ако те са равни на нула, т. е. $f'(x_0) = 0$. ■

Точките, в които първата производна на функцията се анулира, наричаме **стационарни точки**.

Следващата формула е известна като **формула на Тейлър**.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \qquad c \in (x_0, x)$$

Формулата на Тейлър, до втората производна, можем да запишем по следния начин

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad c \in (x_0, x)$$

Когато $x_0 = 0$, формулата на Тейлър е известна като формула на Маклорън.

Теорема 3.5 *Нека x_0 е стационарна точка за функцията $f(x)$, а $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Ако $f''(x_0) < 0$, функцията има локален максимум в точката x_0. Ако $f''(x_0) > 0$, функцията има локален минимум в точката x_0.*

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

От това, че $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f''(x_0) < 0$ следва, че съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такава че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f''(x) < 0$. (*Непрекъснатите функции в околност на точката запазват своя знак - теорема 1.14.*)

Избираме произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и прилагаме формулата на Тейлър до втората производна.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

защото $f'(x_0) = 0$. Тъй като $c \in (x_0, x)$, то $f''(c) < 0$, а $(x - x_0)^2 \geq 0$. Следователно

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0,$$

т.е. в точката x_0 функцията има локален максимум. ■

Най-голяма и най-малка стойност на функция в затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$. Най-голямата и най-малката стойности на функцията в този интервал намираме по следния начин:

1. Намираме точките, в които функцията има локални екстремуми – нека те са $x_1, x_2, ..., x_k$.

2. Най-голямото от числата $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)$ е най-голямата стойност на функцията, а най-малкото - най-малката стойност на функцията.

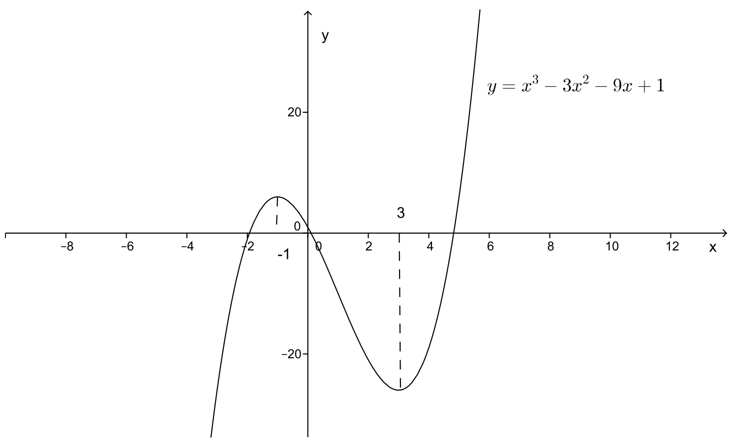
ЗАДАЧИ

3.1 Да се изследва за монотонност функцията $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x.

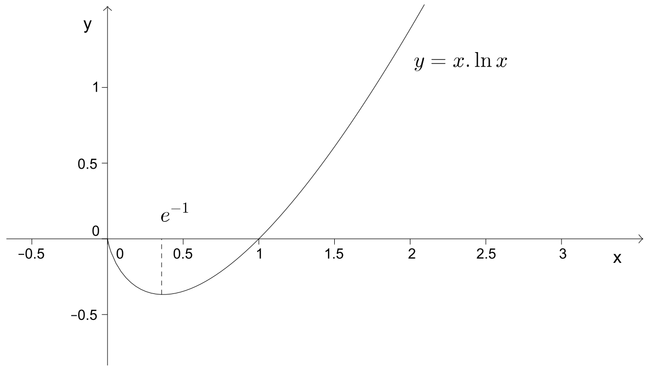
$$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

Оттук се вижда, че $y'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а при $x \in (-1, 3)$ е в сила $y'(x) \leq 0$. Това означава, че в първите два интервала функцията е растяща, а в интервала $(-1, 3)$ е намаляваща.



3.2 Да се изследва за монотонност функцията $y = x \ln x$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$. Пресмятаме $y'(x) = \ln x + 1$. Решаваме неравенството $y'(x) \geq 0$, т.е. $\ln x \geq -1$ и получаваме $x \geq e^{-1}$. Аналогично $y'(x) \leq 0$ при $0 < x \leq e^{-1}$. Следователно, функцията е намаляваща в интервала $(0, e^{-1})$ и растяща в интервала $(e^{-1}, +\infty)$.



3.3 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Решение: Тъй като знаменателят не се анулира, функцията е дефинирана за всяко x. Производната е

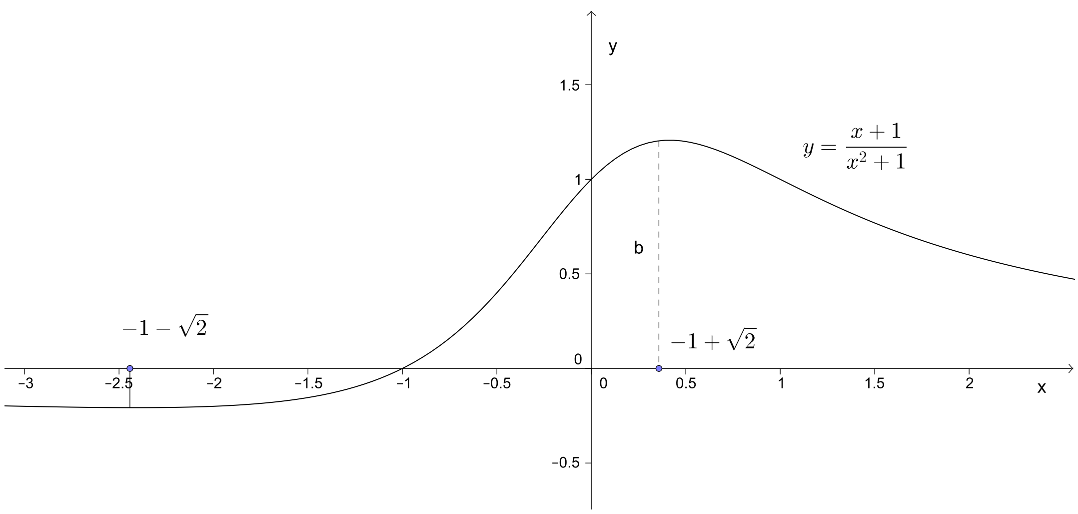
$$y'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$$

Знаменателят е положителен и следователно знакът на производната се определя от числителя. Квадратният тричлен x^2+2x-1 се анулира в $x_1 = -1-\sqrt{2}$ и $x_2 = -1+\sqrt{2}$, т.е. в тези точки първата производна е равна на нула. Имаме

$$y'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2) \qquad \text{и} \qquad y'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

От достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $x_1 = -1-\sqrt{2}$ функцията има локален минимум, а в точката $x_2 = -1+\sqrt{2}$ – локален максимум. Стойностите им са

$$y(-1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad y(-1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

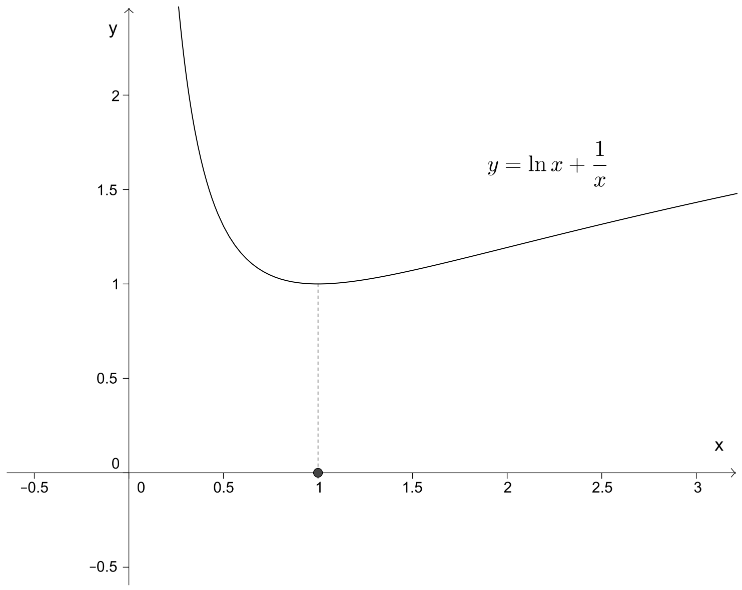


3.4 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$.

$$y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Вижда се, че $y'(1) = 0$, $y'(x) < 0$ при $x < 1$, и $y'(x) > 0$ при $x > 1$. Следователно в точката $x = 1$ функцията има локален минимум. Пресмятаме $y(1) = 1$.



Задачи за самостоятелна работа:

3.5 Да се изследват за монотонност функциите

а) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ Отг. растяща при $x \in (0, e)$
намаляваща при $x \in (e, +\infty)$

б) $y = 2x^2 - \ln x$ Отг. намаляваща при $x \in (0, 0.5)$
растяща при $x \in (0.5, +\infty)$

в) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
растяща при $x \in (0, 2)$

г) $y = \dfrac{e^x}{x}$ Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
растяща при $x \in (1, +\infty)$

3.6 Да се намерят локалните екстремуми на функциите

а) $y = x \ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$

б) $y = x^2 \ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$

в) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ Отг. $y_{\max}(-1) = -2, \quad y_{\min}(1) = 2$

г) $y = x^3 e^{-x}$ Отг. $y_{\max}(3) = \dfrac{27}{e^3}$

д) $y = \dfrac{e^x}{x}$ Отг. $y_{\min}(1) = e$

е) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$ Отг. $y_{\min}\left(\dfrac{8}{27}\right) = -\dfrac{4}{27}, \quad y_{\max}(0) = 0$

3.7 Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията в затворения интервал

а) $y = 2x^2 - x^4 + 3 \qquad x \in [-2, 2]$ Отг. $-5, \quad 4$

б) $y = x + 2\sqrt{x} \qquad x \in [0, 4]$ Отг. $0, \quad 8$

в) $y = \dfrac{x-1}{x+1} \qquad x \in [0, 2]$ Отг. $-1, \quad \dfrac{1}{3}$

Изпъкналост и вдлъбнатост

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в околност на точката x_0.

Дефиниция 3.4 *Казваме, че функцията е* ***изпъкнала*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че за всяка точка от тази околност* ***кривата $y = f(x)$ е разположена над допирателната в точката x_0.***

Дефиниция 3.5 *Казваме, че функцията е* ***вдлъбната*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че за всяка точка от тази околност* ***кривата $y = f(x)$ е разположена под допирателната в точката x_0.***

Дефиниция 3.6 *Казваме, че при $x = x_0$ кривата $y = f(x)$ има* ***инфлексна точка,*** *ако съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че за всяка точка от интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ кривата е от едната страна на допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$, а за всяка точка от интервала $(x_0, x_0 + \delta)$ – от другата страна на допирателната.*

Дадените по-горе дефиниции не обхващат всички възможности. Върху някои криви може да има точки, в които кривата не е нито изпъкнала, нито вдлъбната, нито има инфлексия.

Теорема 3.6 *Ако функцията $f(x)$ има в точката x_0 непрекъсната втора производна и $f''(x_0) > 0$, то в тази точка функцията е изпъкнала, а ако $f''(x_0) < 0$, функцията е вдлъбната.*

Доказателство: От това, че $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f''(x_0) > 0$ следва, че съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f''(x) > 0$ (*Непрекъснатите функции в околност на точката запазват своя знак - теорема 1.14*).

Избираме произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и прилагаме формулата на Тейлър до втората производна.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

Тъй като $c \in (x_0, x)$, то $f''(c) > 0$. Освен това $(x - x_0)^2 \geq 0$. Следователно

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \geq 0.$$

Но

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

е ординатата на точката с абсциса x върху допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, f(x_0))$. Следователно графиката на функцията е над тангентата, т.е. тя е изпъкнала.

Аналогично се доказва и за вдлъбната функция. ■

Теорема 3.7 *Ако в точката x_0 кривата $y = f(x)$ има инфлексия и в нея функцията $f(x)$ има втора производна, то $f''(x_0) = 0$.*

Обратното твърдение не е вярно. Например за функцията $f(x) = x^4$ имаме $f''(0) = 0$, но точката с абсциса $x = 0$ не е инфлексна точка.

Дефиниция 3.7 *Функцията $y = f(x)$ се нарича изпъкнала (вдлъбната) в интервал, когато е изпъкнала (вдлъбната) във всяка точка от този интервал.*

Теорема 3.8 *Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и има втора производна в (a, b). Необходимото и достатъчно условие тази функция да бъде изпъкнала (вдлъбната) в $[a, b]$ е $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) за всяко $x \in (a, b)$.*

Теорема 3.9 *Нека функцията $f(x)$ има втора производна в околност на точката x_0. Ако $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, а $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ или пък $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, а $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то при $x = x_0$ кривата има инфлексия.*

ЗАДАЧИ

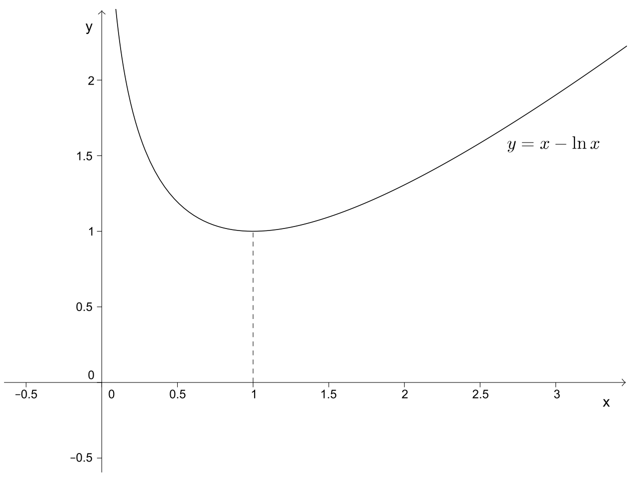
3.8 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията $y = x - \ln x$.

Решение: Дефиниционната област на функцията е интервалът $(0, +\infty)$. Намираме производните

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2}$$

Очевидно $y''(x) > 0$, т.е. функцията е изпъкнала. Инфлексни точки няма.



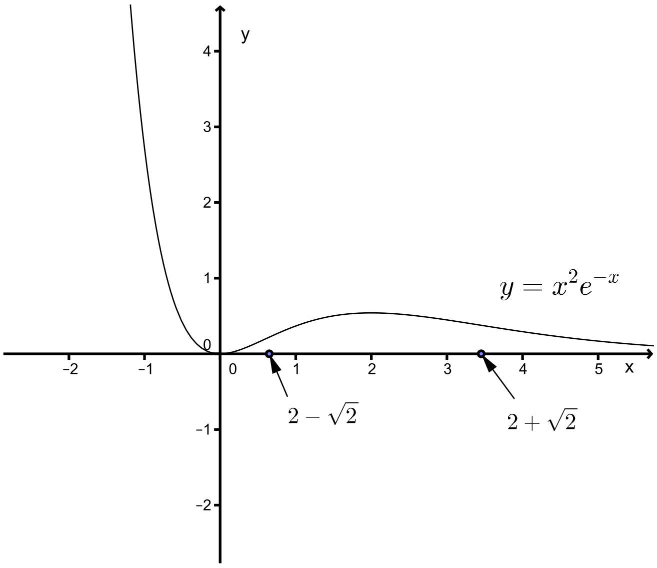
3.9 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията $y = x^2 e^{-x}$.

Решение: Функцията е дефинирана при всяко x. Пресмятаме производните:

$$y'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$y''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Тъй като $e^{-x} > 0$, знакът на $y''(x)$ зависи само от знака на $x^2 - 4x + 2$. Корените на $x^2 - 4x + 2 = 0$ са $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. При $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ втората производна е положителна и функцията е изпъкнала. При $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ втората производна е отрицателна и функцията е вдлъбната. Следователно при $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ имаме инфлексни точки.



Задачи за самостоятелна работа:

3.10 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията

а) $y = x^4 + 6x^2$ Отг. изпъкнала за всяко x

б) $y = 2x^2 + \ln x$ Отг. вдлъбната при $x \in (0, \frac{1}{2})$

изпъкнала при $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

инфлексна точка при $x = \frac{1}{2}$

в) $y = \ln(x^3 + 1)$ Отг. вдлъбната при $x \in (-1, 0)$ и $x \in (\sqrt[3]{2}, +\infty)$

изпъкнала при $x \in (0, \sqrt[3]{2})$

инфлексни точки при $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{2}$

Асимптоти

Дефиниция 3.8 *Ако* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, *то правата* $y = b$ *се нарича* ***хоризонтална асимптота*** *на кривата* $y = f(x)$.

Дефиниция 3.9 *Ако* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, *то правата* $x = a$ *се нарича* ***вертикална асимптота*** *на кривата* $y = f(x)$.

Вертикални асимптоти може да имаме само в точки на прекъсване на функцията.

ЗАДАЧИ

3.11 Да се намерят асимптотите на кривата $y = \dfrac{x}{x^2 - 10x + 21}$

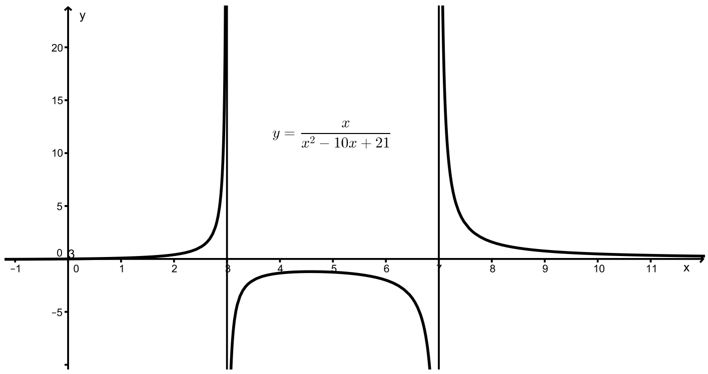
Решение: Функцията е добре дефинирана, когато знаменателят $x^2 - 10x + 21$ е различен от нула. Корените на този квадратен тричлен са $x = 3$ и $x = 7$ и следователно дефиниционната област на функцията е $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 7) \cup (7, +\infty)$, т.е. точките $x = 3$ и $x = 7$ са точки на прекъсване.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2(1 - \frac{10}{x} + \frac{21}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(1 - \frac{10}{x} + \frac{21}{x^2})} = 0$$

Следователно правата с уравнение $y = 0$ (абсцисната ос) е хоризонтална асимптота.

Когато $x \to 3$ числителят на функцията клони към 3, а знаменателят към нула. Това означава, че $\lim\limits_{x\to 1} y = +\infty$ и следователно правата $x = 3$ е вертикална асимптота на кривата.

Аналогично се убеждаваме, че и правата $x = 7$ е вертикална асимптота. Графиката на функцията е представена на следващата фигура.



Задачи за самостоятелна работа:

3.12 Да се намерят асимптотите на кривите

а) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$ Отг. $x = -\dfrac{3}{2}$

б) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ Отг. $x = 0$

в) $y = \dfrac{x^3}{2(1 + x)^2}$ Отг. $x = -1$

Приложение на производните в задачи от икономиката и управлението

Първо ще въведем няколко означения:

x	брой на произведените или продадени продукти
$p = p(x)$	цена за брой
$R = x.p(x)$	общите приходи от продажбата на x броя продукти
C	общите разходи за произвеждането на x броя продукти
$\overline{C} = \dfrac{C}{x}$	среден разход произвеждането на един продукт
$P = R - C$	печалбата от продажбата на x продукта

1. Намиране на максимален приход, доход, печалба.

3.13 Общите приходи на една фирма се определят по формулата

$$R = R(x) = -x^3 + 6x^2 + 27x,$$

където x е броят (в хиляди) на произведените бройки продукти и цената е в лева за брой. При производството на колко бройки ще имаме най-голям приход?

<u>*Решение:*</u> 1. Дефиниционната област на функцията се определя от неравенството

$$-x^3 + 6x^2 + 27x \geq 0 \Longleftrightarrow -x(x^2 - 6x - 27) \geq 0$$

Но $x \geq 0$ и следователно трябва

$$x^2 - 6x - 27 \leq 0$$

Корените на квадратното уравнение

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

са

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 + \sqrt{144}}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 - \sqrt{144}}{2} = \frac{6 - 12}{2} = -3$$

Следователно функцията е дефинирана в интервала $[0, 9]$, т.е. $0 \leq x \leq 9$.

2. Намираме

$$R'(x) = -3x^2 + 12x + 27$$

и я приравняваме на нула. Получаваме:

$$-3x^2 + 12x + 27 = 0$$

$$x^2 - 4x - 9 = 0$$

Корените на квадратното уравнение

$$x^2 - 4x - 9 = 0$$

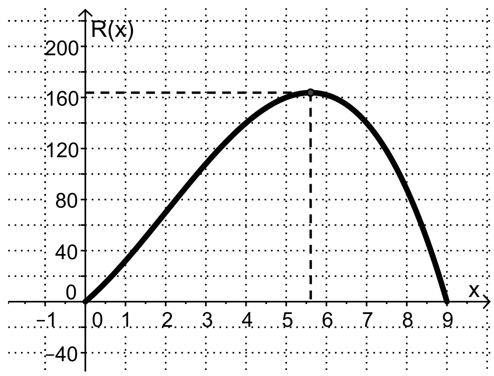
са

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 36}}{2} = \frac{4 + \sqrt{52}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13} \approx 5,6$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 36}}{2} = \frac{4 - \sqrt{52}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} \approx -1,6$$

3. Пресмятаме $R(0) = 0$, $R(9) = 0$, $R(x_1) \approx 163,7$. Следователно фирмата ще има най-голям приход, ако произведе 5,6.100=**5600 броя** изделия.

На следващата фигура е представена графиката на функцията $R(x)$.



3.14 Маркетинговият отдел на една фирма пресметнал, че цената на един продукт (в левове) е $p = \dfrac{50}{\sqrt{x}}$, а $C = \dfrac{x}{2} + 500$ $(1000 \leq x \leq 5000)$. При каква цена фирмата ще има максимална печалба?

<u>*Решение:*</u> 1. Знаем, че $P = R - C$. Следователно

$$P = x.p - C = x.\frac{50}{\sqrt{x}} - \left(\frac{x}{2} + 500\right) = 50\sqrt{x} - 0,5x - 500$$

2. Дефиниционната област на функцията е $x \in [1000, 5000]$.

3. Намираме

$$P'(x) = (50\sqrt{x} - 0,5x - 500)' = \frac{25}{\sqrt{x}} - 0,5$$

и я приравняваме на нула. Получаваме:

$$\frac{25}{\sqrt{x}} - 0,5 = 0$$

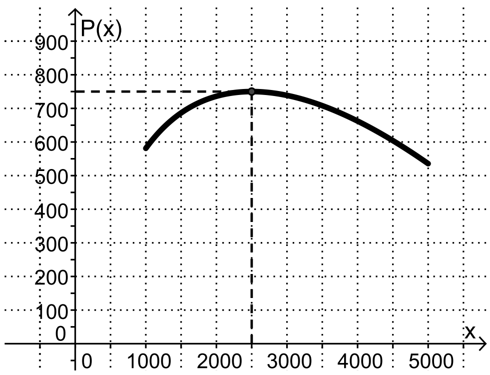
$$\frac{25}{\sqrt{x}} = 0,5$$

$$25 = 0,5\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = \frac{25}{0,5} = 50$$

Следователно
$$x = 2500$$

Тогава цената е
$$p = \frac{50}{\sqrt{x}} = \frac{50}{\sqrt{2500}} = \frac{50}{50} = 1 \text{ лев.}$$

На следващата фигура е представена графиката на функцията $P(x)$.



3.15 Фирма продава 4000 бройки изделия на месец на цена 10 лева за бройка. Тя може да си позволи да намалява цената с 25 стотинки за бройка на всеки 500 допълнителни бройки. Каква цена за бройка ще максимизира месечния приход на фирмата?

Решение: 1. Знаем, че $R = x.p(x)$

2. Нека фирмата е продала n пъти по 500 нови допълнителни бройки, т.е.
$$x = 4000 + 500.n$$

Тъй като на всеки 500 бройки цената намалява с 25 стотинки, то цената ще бъде
$$p = 10 - n.0,25$$

Следователно
$$n = \frac{10-p}{0,25}$$

и за броя на произведените изделия получаваме
$$x = 4000 + 500.\left(\frac{10-p}{0.25}\right) = 24000 - 2000p,$$

т.е.
$$p = 12 - \frac{x}{2000}$$

Следователно
$$R = 12x - \frac{x^2}{2000}$$

3. Дефиниционната област на функцията е $0 \le x \le 24000$.

4. Намираме

$$R'(x) = 12 - \frac{x}{1000}$$

и я приравняваме на нула. Получаваме:

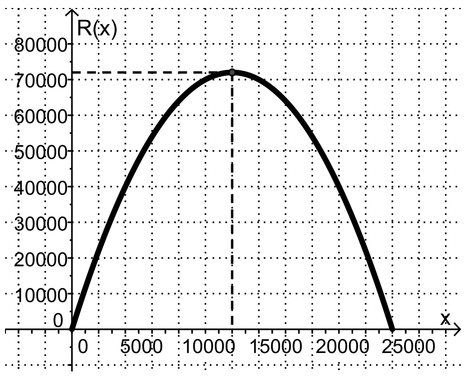
$$12 - \frac{x}{1000} = 0$$

$$x = 12000$$

Тогава цената, която максимизира прихода е

$$p = 12 - \frac{12000}{2000} = 6 \text{ лева.}$$

На следващата фигура е представена графиката на функцията $R(x)$.



2. Намиране на минимален среден разход (цена).

3.16 Една фирма пресметнала, че разходите (сумата в левове) за производството x броя продукти е $C = 1200 + 0,04x + 0,0003x^2$. Намерете колко броя продукти трябва да се произведат, че средният разход за един продукт да бъде минимален. Сравнете тази цена с цената за 800 произведени продукта.

Решение: 1. Знаем, че $\overline{C} = \dfrac{C}{x}$.

2. Следователно $\overline{C} = \dfrac{0,0003x^2 + 0,04x + 1200}{x} = 0,0003x + \dfrac{1200}{x} + 0,04$.

3. Дефиниционната област на функцията е $x > 0$.

4. Намираме

$$\overline{C}\,'(x) = 0,0003 - \frac{1200}{x^2}$$

и я приравняваме на нула. Получаваме:

$$0,0003x^2 = 1200$$

$$x^2 = \frac{1200}{0,0003} = 4000000$$

$$x = \pm 2000$$

Но $x > 0$ и следователно

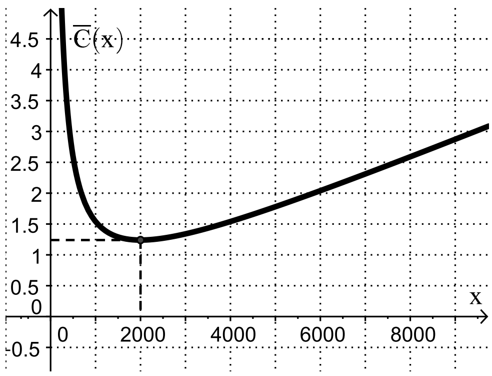
$$x = 2000$$

Тогава $\overline{C} = 0,0003.2000 + \dfrac{1200}{2000} + 0,04 = 0,6 +,06 + 0,04 = 1,24.$

При производството на 800 бройки цената ще бъде

$$\overline{C} = 0,0003.800 + \frac{1200}{800} + 0,04 = 0,24 + 1,5 + 0,04 = 1,78$$

На следващата фигура е представена графиката на функцията $\overline{C}(x)$.



3. Минимални разходи за производство и складиране.

3.17. Фирма трябва да произведе N на брой изделия през годината. Тази продукция трябва да се складира на партиди, като броят на изделията във всяка партида е L. Фиксираната цена за производство на една партида е F. Средната цена за престой на единица бройка в склада е i, а средният престой на пратка в склада е $\dfrac{L}{2}$. Намерете колко броя продукти трябва да се произвеждат във всяка партида, че стойността на разходите да бъде минимална.

<u>*Решение:*</u> 1. Разходите имат две съставящи. Едната част са разходите за производството на определен брой партиди, а другата част са разходите за престой в склада. Разходите за производството на определен брой партиди са $\dfrac{N}{L} \cdot F$, а разходите за престой в склада са $\dfrac{L}{2} \cdot i$. Следователно общите разходи са

$$C(L) = \frac{N}{L} \cdot F + \frac{L}{2} \cdot i$$

2. Дефиниционната област на функцията е $L > 0$.

3. Намираме

$$C\,'(L) = -\frac{N.F}{L^2} + \frac{i}{2}$$

и я приравняваме на нула. Получаваме:

$$\frac{N.F}{L^2} = \frac{i}{2}$$

$$L^2 = \frac{2NF}{i}$$

$$L = \sqrt{\frac{2NF}{i}}$$

Тъй като

$$C\,''(L) = \frac{2N.F}{L^3} > 0$$

следва, че имаме минимум.

Ако например $N = 72000$, $F = 500$ и $i = 0,50$, то

$$L = \sqrt{\frac{2.72000.500}{0.5}} = \sqrt{144000000} = 12000,$$

т.е. фирмата трябва да произведе продукцията на шест партиди и обемът на всяка партида трябва да бъде 12000 изделия.

4. Ценова еластичност на търсенето.

Нека $y = p(x)$ е функция на търсенето и нека тя е диференцируема. Да напомним, че функцията на търсенето е намаляваща и нейната производна $p'(x)$ е отрицателна, а x и $p(x)$ са положителни.

Ценовата еластичност на търсенето се дефинира с равенството

$$\eta = \frac{p/x}{dp/dx} = \frac{p}{x.p'}$$

Ако за дадена цена $\eta < -1$, то казваме, че търсенето **е еластично** по отношение на цената.

Ако за дадена цена $-1 < \eta < 0$, то казваме, че търсенето **не е еластично** по отношение на цената.

Ако за дадена цена $\eta = -1$, то казваме, че търсенето **е точково еластично** по отношение на цената.

Връзката между ценовата еластичност на търсенето и прихода е следната:

1. Ако търсенето **е еластично**, т.е. $\eta < -1$, то намаляването на единичната цена се компенсира от достатъчно голямо нарастване на продажбите, което води до нарастване на прихода.

2. Ако търсенето **не е еластично**, т.е. $-1 < \eta < 0$, то нарастването на продажбите е придружено от намаляване на единичната цена, което не е достатъчно за да доведе до нарастване на прихода и той намалява.

Наистина: Както знаем, приходът е

$$R = x.p(x)$$

Следователно:

$$R'(x) = p(x) + x.p'(x) = p(x)\left(1 + \frac{x.p'(x)}{p(x)}\right) = p(x)\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)$$

Ако $\eta < -1$, то $\eta(\eta+1) > 0$ и следователно $R'(x) > 0$, т.е. функцията **расте**.

Ако $-1 < \eta < 0$, то $\eta(\eta+1) < 0$ и следователно $R'(x) < 0$, т.е. функцията **намалява**.

Ако $\eta = -1$, то $R'(x) = 0$ и функцията има **локален максимум**.

3.18 Нека търсенето на даден продукт се задава с функцията

$$p(x) = \sqrt{18 - x}, \quad 0 \le x \le 18$$

За кои стойности на x търсенето е еластично, за кои не е еластично и кога е точково еластично?

<u>*Решение:*</u> 1. Ценовата еластичност се определя от равенството

$$\eta = \frac{p/x}{dp/dx} = \frac{p}{x.p'} = \frac{\sqrt{18-x}}{\frac{-x}{2\sqrt{18-x}}} = \frac{2x - 36}{x}$$

За да определим кога търсенето е точково еластично решаваме уравнението

$$\eta = \frac{2x-36}{x} = -1,$$

откъдето получаваме $x = 12$.

За да определим кога търсенето е еластично решаваме неравенството

$$\eta = \frac{2x-36}{x} < -1 \Longleftrightarrow \frac{3x-36}{x} < 0 \Longleftrightarrow 3x(x-12) < 0$$

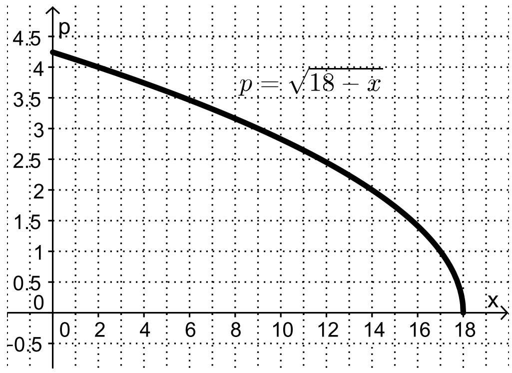
Следователно в дефиниционната област на $p(x)$ решението е $x \in (0, 12)$.

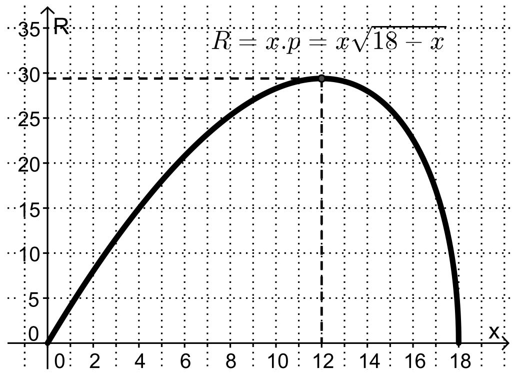
Търсенето не е еластично когато

$$-1 < \eta < 0 \Longleftrightarrow -1 < \frac{2x - 36}{x} < 0$$

Сега решението е $x \in (12, 18)$.

На следващите фигури са изобразени графиките на функциите $p(x)$ и $R(x)$.





В следващата задача ще изясним как промяната на данъка върху единица продукция влияе върху общия приход в държавната хазна - Q.

Ако данъкът върху единица продукция се увеличи, количеството продукти, което потребителите ще купят ще се намали. Въпросът е какво трябва да е това увеличение на данъка, че намалението на продажбите да бъде такова, че да компенсира ефекта върху общия приход за правителството.

За да отговорим на този въпрос ние трябва да знаем скоростта на промяна на данъчния приход в зависимост от изменението на данъка върху единица продукция.

3.19 Нека кривите на търсене и на предлагане са съответно

$$p_d(q) = 92 - 2q \qquad \text{и} \qquad p_s(q) = 12 + 3q$$

Какъв данък за единица продукция ще повиши максимално данъчните приходи за правителството?

Решение: Нека данъкът за единица продукция бъде t. Това променя кривата на предлагане на

$$p_s(q) = 12 + 3q + t$$

Сега е необходимо да изразим количеството q като функция на данъка t. В точката на равновесие на пазара, цената на предлагането е равна на цената на търсенето и получаваме, че

$$12 + 3q + t = 92 - 2q$$

$$\Rightarrow \quad 5q = 80 - t$$

$$\Rightarrow \quad q = 16 - 0.2t$$

Общият приход $Q(t)$ за правителството от данъка върху единица продукция е равен на

$$Q(t) = qt = (16 - 0,2t)t = 16t - 0,2t^2$$

Диференцираме последното равенство и получаваме скоростта на изменение на общия приход $Q(t)$ по отношение на t

$$Q'(t) = 16 - 0,4t,$$

Ако $Q'(t) > 0$, което представлява увеличение на данъка t, то $Q(t)$ ще нараства. Въпреки това, от формулата за $Q'(t)$ виждаме, че когато размерът на данъка t се увеличава, стойността на $Q'(t)$ намалява. За да се максимизира $Q(t)$, производната $Q'(t)$ трябва да се увеличава, докато стане равна на нула. Всяко по-нататъшно повишаване на t ще доведе до това, че производната $Q'(t)$ ще стане отрицателна и приходът $Q(t)$ ще започне да спада.

Следователно

$$Q'(t) = 16 - 0,4t = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0,4t = 16 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 40$$

Затова данък от 40 лева за единица продукция ще увеличи максимално данъчната доходност за правителството.

Глава 4

Неопределен интеграл

Понятието неопределен интеграл е свързано с действието, което е обратно на диференцирането. Намирането на функция, чиято производна е равна на дадена функция, се нарича интегриране и методите за интегриране се оказват доста по-сложни от методите за диференциране.

Теорема 4.1 *(Основна теорема на интегралното смятане) Ако $f'(x) = 0$ в интервала (a, b), то функцията е константа в този интервал.*

Доказателство: Да фиксираме точката $x_0 \in (a, b)$ и нека $x \in (a, b)$ е произволна точка. Прилагаме теоремата на Лагранж за точките x_0 и x и получаваме:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0.(x - x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x_0),$$

а това означава, че $f(x)$ е константа. ■

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в даден интервал.

Дефиниция 4.1 *Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е* ***примитивна функция*** *на $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема в този интервал и $F'(x) = f(x)$.*

Теорема 4.2 *Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x) + C$, където C е константа.*

Доказателство: Да означим с $\Phi(x)$ произволна примитивна на $f(x)$ и да разгледаме функцията $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Тогава

$$\varphi'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

за всяко x в дадения интервал. Тогава според основната теорема на интегралното смятане функцията $\varphi(x)$ е константа в този интервал, т.е. $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) = C$. Следователно $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Дефиниция 4.2 *Множеството от всички примитивни функции на функцията $f(x)$ се нарича* ***неопределен интеграл*** *и се означава с*

$$\int f(x)\, dx,$$

а функцията $f(x)$ се нарича ***подинтегрална функция****, т.е.*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \qquad \text{където} \qquad F'(x) = f(x)$$

Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$.

4.1 $\int e^x\,dx = e^x + C$, защото $(e^x)' = e^x$.

4.2 $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, защото $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

Доказателство: $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

2. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)$

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ *a-константа*

Доказателство: $\left(a\int f(x)\,dx\right)' = a.\,(F(x)+C)' = a.F'(x) = a.f(x)$

4. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Доказателство:

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) + g(x)$$

5. Ако $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

Доказателство: $(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

1. $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

2. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

3. $$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

4. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C \qquad (a \neq 0)$$

5. $$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Доказателството на формулите следва директно, като се диференцират функциите от дясната страна на равенствата.

Формула 5 може да се получи и по следния начин:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

Следователно

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,d(x-a) - \int \frac{1}{x+a}\,d(x+a)\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

В следващите редове ще се запознаем с някои елементарни методи за интегриране. Под **непосредствено интегриране** ще разбираме пресмятане на неопределени интеграли чрез прилагане на основните свойства и табличните интеграли. Ще демонстрираме този метод с няколко примера.

4.3 $$\int (x^4 + 4x^3 - 3x + 1)\,dx = \int x^4\,dx + 4\int x^3\,dx - 3\int x\,dx + \int 1\,dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

4.4 $$\int \frac{x^6+5x^3\sqrt{x}-3x+2}{x^2}\,dx = \int x^4\,dx + 5\int x\sqrt{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 5\int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 3\ln|x| + 2\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^{\frac{5}{2}} - 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

В следващите няколко примера ще демонстрираме прилагането на свойство 5, в случая когато $\varphi(x) = ax + b$. Тогава имаме

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad a,b \text{ - } \textit{константи}$$

4.5 $$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,d(3x) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$$

4.6 $$\int e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x-1}\,d(2x) = \frac{1}{2}\int e^{2x-1}\,d(2x-1) = e^{2x-1} + C$$

От разгледаните примери се вижда, че имаме право да умножим променливата x след знака за диференциал с число, но трябва да компенсираме с деление пред знака за интеграл със същото число. След знака за диференциал можем да прибавяме или изваждаме числа, каквито са ни необходими, за да получим табличен интеграл.

Следващите няколко примера ще съдържат квадратни тричлени и основната операция за пресмятането им ще бъде операцията **отделяне на точен квадрат**.

4.7 $$\int \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-4}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-2^2}\,d(x+3) =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C$$

4.8 $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+12}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,d(x+4) =$$

$$= \ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+12}| + C$$

Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Както знаем, ако $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$. В такъв случай имаме

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,d\varphi(x)$$

Когато прилагаме това равенство ще казваме, че внасяме функцията $\varphi'(x)$ под знака на диференциала или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. Поради тази причина често казваме, че внасянето под знака на диференциала е интегриране и внасяме под знака на диференциала функции, които лесно се интегрират (например има ги в табличните интеграли). Ползата от това действие се вижда ясно при прилагане на свойство 5.

4.9 $2\int xe^{x^2}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x) $= \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C$

4.10 $2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x)$=$

$= \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \ln|x^2+1| + C$

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане, субституция)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала D, а $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала D_1 и е обратима. Тогава

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + C$$

Равенството трябва да се разбира по следния начин: лявата страна на равенството е равна на дясната, ако след интегрирането направим субституцията $x = \varphi(t)$ и изберем подходяща константа C.

Доказателство:

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right).\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следователно, ако във функцията $\int f(x)\,dx$ направим полагането $x = \varphi(t)$, ще получим примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ е също примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, а както знаем две примитивни се различават само с константа.

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане) ще прилагаме, когато желаем да пресметнем $\int f(x)\,dx$ и можем да подберем функцията $\varphi(t)$ така, че след заместването на x с $\varphi(t)$ полученият интеграл да е по-лесен за пресмятане.

4.11 $I = \int \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}\,dx$

Ако в интеграла направим субституцията $x = t^2 - 3,\ \ (x+3 \geq 0)$, то $\sqrt{x+3} = t$ и

$dx = 2tdt$. Тогава интегралът добива вида $I = \int \frac{2t}{2+t}\,dt = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\,dt =$

$= 2\left(\int 1\,dt - 2\int \frac{1}{t+2}\,d(t+2)\right) = 2t - 4\ln|t+2| + C = 2\sqrt{x+3} - 4\ln(2+\sqrt{x+3}) + C$

Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ са две диференцируеми в даден интервал функции. Тогава

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следователно

$$uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Последното равенство се нарича формула за интегриране по части.

4.12 $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx =$

$= x(\ln x - 1) + C$

4.13 $5\int x^4 \ln x\,dx =$ (внасяме x^4 под знака на диференциала) $= \int \ln x\,dx^5 =$

$= x^5\ln x - \int x^5 d\ln x = x^5\ln x - \int x^5\frac{1}{x}dx = x^5\ln x - \int x^4 dx = x^5\ln x - \frac{x^5}{5} + C$

4.14 $\int x^2 e^x\,dx =$ (внасяме e^x под знака на диференциала) $= \int x^2\,de^x =$

$= x^2e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$ (пак внасяме e^x под знака на диференциала) $=$

$= x^2e^x - 2\int x\,de^x = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

Задачи за самостоятелна работа:

4.15 $\int (5x^4 - 4x^3 + x - 1)\,dx$ Отг. $x^5 - x^4 + \frac{x^2}{2} - x + C$

4.16 $\int \left(x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\,dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 2x\sqrt{x} - \ln|x| + C$

4.17 $\int \left(x^2 - 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)\,dx$ Отг. $\frac{x^3}{3} - 2x\sqrt{x} + \frac{2}{x} + C$

4.18 $\int \frac{x^5 + 3x^2 - 1}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 3x + \frac{1}{x} + C$

4.19 $\int \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

4.20 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ Отг. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$

4.21 $\int \frac{1}{4x+13}\,dx$ Отг. $\frac{1}{4}\ln|4x+13| + C$

4.22 $\int \frac{1}{3-2x}\,dx$ Отг. $-\frac{1}{2}\ln|3-2x| + C$

4.23 $\int e^{5x-1}\,dx$ Отг. $\frac{1}{5}e^{5x-1} + C$

4.24 $\int \frac{1}{\sqrt{3x-11}}\,dx$ Отг. $fr23\sqrt{3x-11} + C$

4.25 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}\,dx$ Отг. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-1)^2} + C$

4.26 $\int \frac{1}{9x^2-16}\,dx$ Отг. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$

4.27 $\int \frac{1}{2x^2-1}\,dx$ Отг. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C$

4.28 $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+8x+12}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x+6}\right|+C$

4.29 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$ Отг. $\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+10}|+C$

4.30 $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$

4.31 $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}\,dx$ Отг. $e^{x^3}+C$

4.32 $\displaystyle\int \frac{x+2\ln x}{x}\,dx$ Отг. $x+\ln^2 x+C$

4.33 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx$ Отг. $\ln|x^2+x+5|+C$

4.34 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$ Отг. $\displaystyle\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$

4.35 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx$ Отг.$\displaystyle\frac{4}{7}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^7-\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3+C$

4.36 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+2}-1}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+2}\right)^3+x-2\sqrt{x+2}-2\ln|\sqrt{x+2}-1|+C$

4.37 $\displaystyle\int \ln(2x-5)\,dx$ Отг. $\displaystyle x\ln(2x-5)-x-\frac{5}{2}\ln|2x-5|+C$

4.38 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ Отг. $\displaystyle-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

4.39 $\displaystyle\int 2xe^{2x}\,dx$ Отг. $\displaystyle xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$

4.40 $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$ Отг. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

Глава 5

Определен интеграл. Приложения

Понятието определен интеграл е едно от основните понятия в математическия анализ. Счита се, че е било въведено в математиката в окончателен вид през XVII век от двамата създатели на диференциалното и интегрално смятане - Лайбниц и Нютон, които по различни пътища достигат до него. Основният техен резултат се състои в това, че са установили тясната връзка, която съществува между две понятия, на пръв поглед стоящи далеч едно от друго, като понятието определен интеграл и понятието производна на функция.

Една от задачите, които по естествен път водят до въвеждането на понятието определен интеграл, е задачата за пресмятане лицето на фигурата, заградена от графиката на една неотрицателна и ограничена в интервала [a, b] функция $f(x)$, абсцисната ос и правите с уравнения $x = a$ и $x = b$.
Нека е дадена функцията $y = f(x)$, дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]. Разделяме по произволен начин интервала [a, b] на подинтервали с точките

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

Дължината на i-ия интервал бележим с

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Във всеки подинтервал избираме произволна точка

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

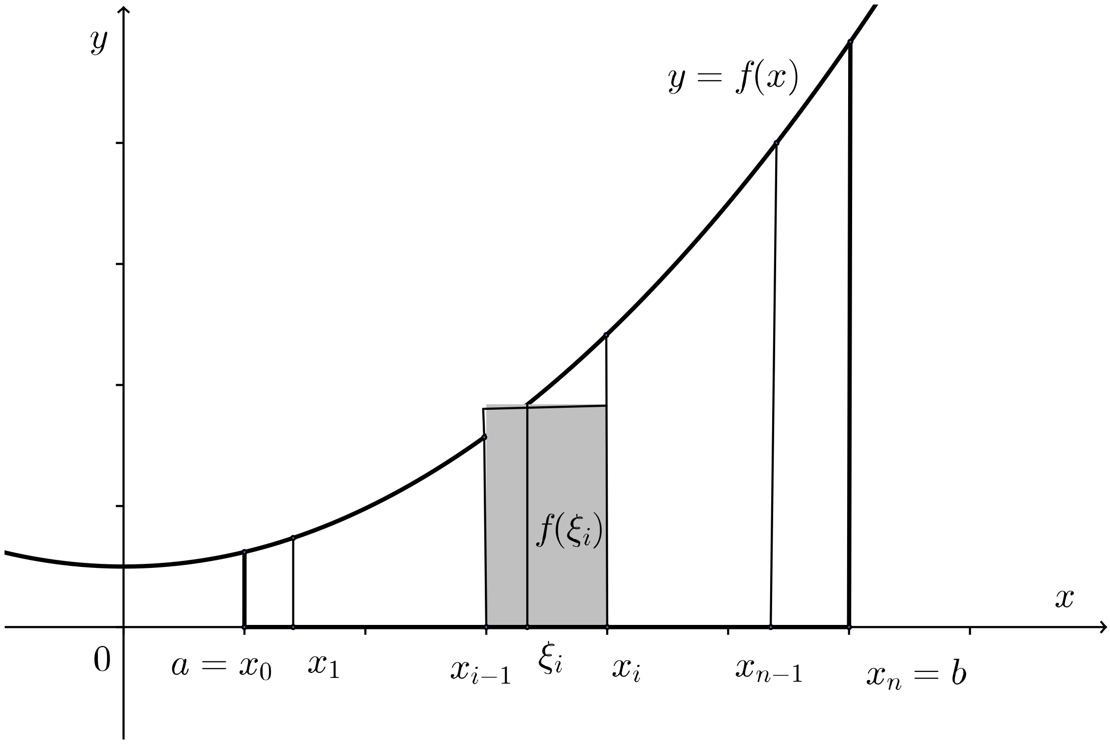
и пресмятаме стойността на функцията в тази точка, т.е. $f(\xi_i)$. След това умножаваме тази стойност по дължината на подинтервала, т.е. получаваме

$$f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

което е лицето на правоъгълника с основа отсечката, определена от точките x_{i-1} и x_i, и височина отсечката с дължина $f(\xi_i)$ (виж чертежа на следващата страница). Сумата от тези стойности за всичките n подинтервала

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

се нарича ***Риманова интегрална сума*** за функцията $f(x)$, съответстваща на даденото разбиване на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i.



Да означим с λ максималната дължина на подинтервалите, т.е.

$$\lambda = max\, \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ако съществува границата

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S$$

независимо от начина на разделяне на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i, то функцията $f(x)$ се нарича **интегрируема в Риманов смисъл**, а границата S се нарича **определен интеграл** от функцията $f(x)$ в интервала [a,b] и се означава с

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Числото a се нарича ***долна граница***, а числото b - ***горна граница*** на определения интеграл.

Свойства:

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (по дефиниция)

2. $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ *M-константа*

3. $\displaystyle\int_a^b Mf(x)\,dx = M\int_a^b f(x)\,dx$ *M-константа*

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^b (\ f(x) + g(x)\ )\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

6. Ако $f(x) \le g(x)$ при $x\in$[a, b], то $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Теорема 5.1: *Ако една функция е неограничена в интервала* [a, b], *то тя не е интегрируема в Риманов смисъл.*

Теорема 5.2: *1. Всяка непрекъсната в интервала* [a, b] *функция е интегрируема в Риманов смисъл.*

2. Всяка монотонна и ограничена в интервала [a, b] *функция е интегрируема в Риманов смисъл.*

Формула на Лайбниц-Нютон

Нека

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{т.е.} \quad F'(x) = f(x)$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

и това равенство се нарича ***формула на Лайбниц-Нютон*.**

Въвеждаме означението $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формулата на Лайбниц-Нютон ни казва, че за да пресметнем един определен интеграл, първо трябва да намерим някаква примитивна функция на подинтегралната функция (т.е. да пресметнем съответния неопределен интеграл). След това от стойността на тази примитивна в горната граница на интеграла да извадим стойността ѝ в долната граница на интеграла.

5.1 $\displaystyle\int_0^1 (x^4 + 4x^3 - 3x + 1)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx + 4\int_0^1 x^3\,dx - 3\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$

$$= \left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) + \left(x^4\Big|_0^1\right) - \left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + \left(x\Big|_0^1\right) = \frac{1}{5} + 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{10}$$

5.2 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 4e^{2x})\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx + 4\int_1^2 e^{2x}\,dx = \left(x^3\Big|_1^2\right) + 2\int_1^2 e^{2x}\,d(2x) =$

$$= 7 + 2\left(e^{2x}\Big|_1^2\right) = 7 + 2(e^4 - e^2) = 7 + 2e^2(e^2 - 1)$$

Интегриране чрез смяна на променливата

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b] , а $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$ и стойностите ѝ принадлежат на интервала [a, b]. Освен това нека

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{и} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Доказателство: Нека

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Тогава

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

5.3 $\displaystyle I = \int_7^{12} \sqrt{x-3}\,dx$

Ако направим субституцията $x = t^2 + 3$, то $dx = 2tdt$ и

$$\sqrt{x-3} = t.$$

Сменяме границите на интеграла в съответствие с таблицата

x	t
12	3
7	2

Сега интегралът добива вида

$$I = 2\int_2^3 t^2\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}\Big|_2^3\right) = 2\left(9 - \frac{8}{3}\right) = \frac{38}{3}$$

Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Тогава

$$\int_a^b u\,dv = \left(u.v\Big|_a^b\right) - \int_a^b v\,du$$

Доказателство: От формулата за интегриране по части при неопределен интеграл имаме

$$\int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)$$

Следователно

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x))\,dx,$$

което записваме по-кратко по следния начин

$$\int_a^b u\,dv = \left(u.v\Big|_a^b\right) - \int_a^b v\,du$$

■

5.4 $4\int_1^2 x^3 \ln x\,dx = \int_1^2 \ln x\,dx^4 = x^4 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x^4 d\ln x = 16\ln 2 - \int_1^2 x^4 \frac{1}{x}dx =$

$16\ln 2 - \int_1^2 x^3 dx = 16\ln 2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 16\ln 2 - \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 16\ln 2 - \frac{15}{4}$

5.5 $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \int_0^1 x^2\,de^x = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx^2 = e - 2\int_0^1 xe^x\,dx =$

$= e - 2\int_0^1 x\,de^x = e - 2\left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right) = e - 2\left(e - e^x \Big|_0^1\right) =$

$= e - 2(e - e + 1) = e - 2 \approx 0.7182$

Задачи за самостоятелна работа:

5.6 $\int_0^1 (5x^4 - 4x^3 + x - 1)\,dx$ Отг. $-\frac{1}{2}$

5.7 $\int_{-1}^2 (4x^3 - 6x + 4e^{2x})\,dx$ Отг. $6 + 2(e^4 - e^{-2})$

5.8 $\int_2^3 \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{113}{6} - \ln 3 + \ln 2$

5.9 $\int_1^2 \frac{x^4 - 3x^2 - x + 3}{x}\,dx$ Отг. $3\ln 2 - \frac{7}{4}$

5.10 $2\int_1^2 (2x - 1)\ln x\,dx$ Отг. $4\ln 2 - 1$

5.11 $27\int_0^1 (x^2 - 1)e^{3x}\,dx$ Отг. $7 - 4e^3$

5.12 $\int_5^{10} (x - 2\sqrt{x - 1})\,dx$ Отг. $\frac{73}{6}$

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

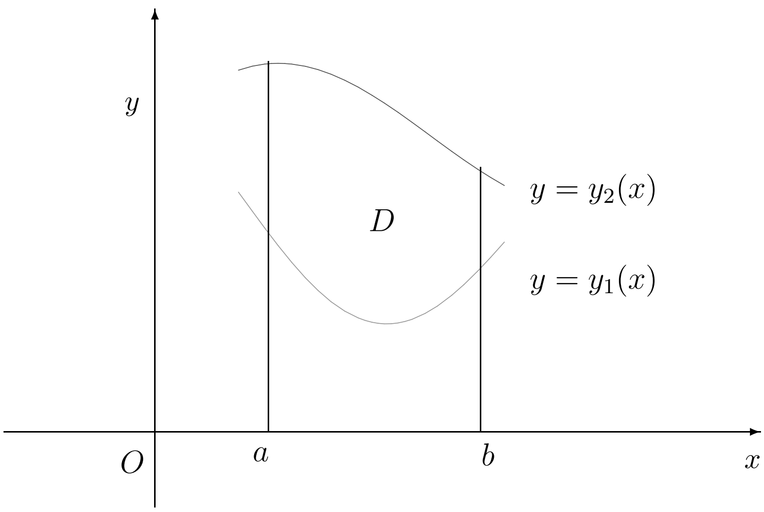
1. Лице на равнинна фигура

Областта, заградена от графиката на непрекъснатата функция $y = y(x) \geq 0$, правите линии с уравнения $x = a$, $x = b$ $\quad (a < b)$ и абсцисната ос се нарича *криволинеен трапец*.

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq y(x) \end{cases}$$

Лицето на криволинейния трапец пресмятаме с формулата

$$S = \int_a^b y(x)\, dx \tag{5.1}$$



Лицето на областта D, заградена от графиките на непрекъснатите функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $\quad y_1(x) \leq y_2(x)$, и правите линии с уравнения $x = a$, $x = b$, т.е.

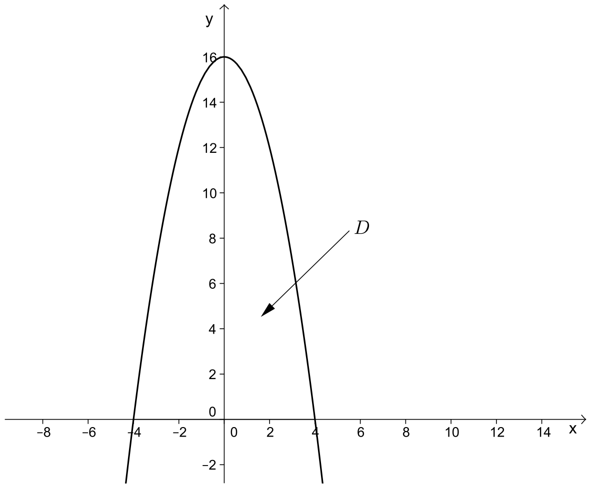
$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

се пресмята с формулата

$$S_D = \int_a^b (\ y_2(x) - y_1(x)\ )\, dx \tag{5.2}$$

5.13 Намерете лицето на областта заградена от функцията $f(x) = 16 - x^2$ и абсцисната ос x.

Решение: Кривата $y(x) = 16 - x^2$ е парабола с връх в точката $(0, 16)$, обърната надолу и пресечните и точки с абсцисната ос са $(-4,\ 0)$ и $(4,\ 0)$.



Следователно лицето на областта е

$$S = \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx = \int_{-4}^{4} 16\, dx - \int_{-4}^{4} x^2\, dx =$$
$$= 16 \left(x \Big|_{-4}^{4} \right) - \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^{4} \right) = 128 - \frac{128}{3} = \frac{256}{3}.$$

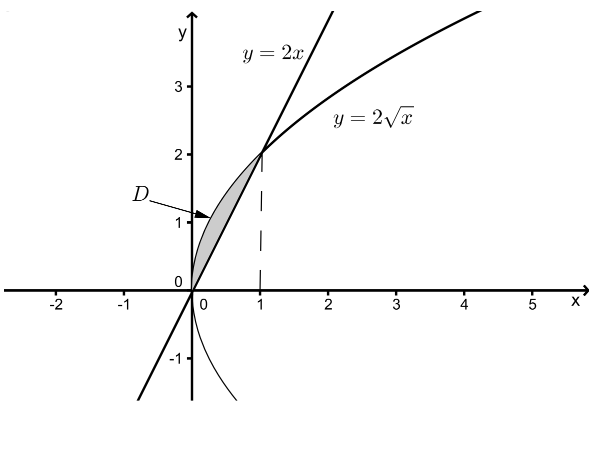
5.14 Да се пресметне лицето на областта, заградена от правата $y = 2x$ и параболата $y^2 = 4x$.

Решение: Намираме пресечните точки на правата и параболата като решаваме системата от двете уравнения. Получаваме съответно:

$$4x^2 = 4x, \quad x^2 = x, \quad x^2 - x = 0, \quad x(x-1) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 1$$

Следователно областта D е заградена от правите линии с уравнения $x = 0$, $x = 1$ и графиките на функциите $y = 2x$ и $y = 2\sqrt{x}$, т.е.

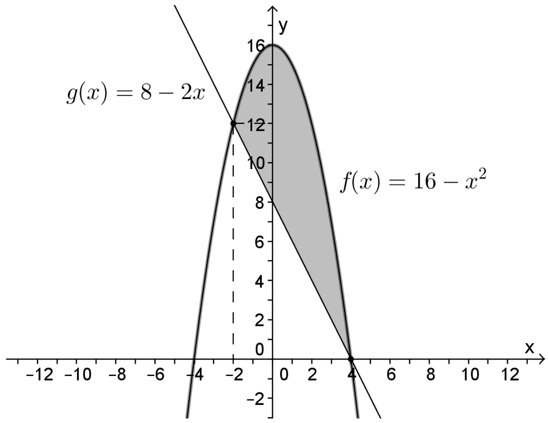
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$$



Тогава

$$S_D = \int_0^1 (2\sqrt{x}-2x)\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - 2\int_0^1 x\, dx = \frac{4}{3}\left(x\sqrt{x}\ \Big|_0^1 \right) - \left(x^2 \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

5.15 Намерете лицето на областта заградена от правата $y(x) = 8-2x$ и параболата $f(x) = 16 - x^2$.



Решение: За да намерим пресечните точки на правата и параболата решаваме уравнението $16 - x^2 = 8 - 2x$. Корените му са $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$. Следователно лицето на областта е

$$S = \int_{-2}^{4} [(16 - x^2) - (8 - 2x)]\, dx = \int_{-2}^{4} 8\, dx - \int_{-2}^{4} x^2\, dx + \int_{-2}^{4} 2x\, dx =$$

$$= 8\left(x \Big|_{-2}^{4} \right) - \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{4} \right) + \left(x^2 \Big|_{-2}^{4} \right) = 48 - 20 + 12 = 36.$$

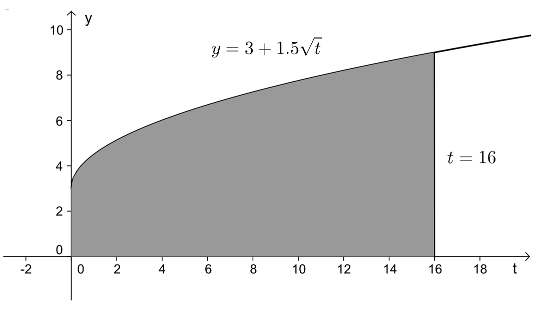
Следващите примери са по-интересни от икономическа гледна точка.

Ако по оста x отчитаме брой продукти, а по оста y цената за един продукт, то лицето на областта е приход, доход.

Ако по оста x отчитаме време, а по оста y брой продукти, произведени за единица време, то лицето на областта ще отразява количество.

5.16 Нуждите на индустрията на една страна от гориво за година във всеки момент t се задават с функцията $y(t) = 3 + 1.5\sqrt{t}$ милиона литра. Колко гориво ще бъде използвано за 16 години?

Решение: Количеството гориво е равно на



$$\int_0^{16} (3+1.5\sqrt{t})\, dt = \int_0^{16} 3\, dt + 1.5 \int_0^5 \sqrt{t}\, dt = 3 \left(t\Big|_0^{16} \right) + 1.5 \left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^{16} \right) = 48+64 = 112$$

милиона литра.

5.17 Ако разполагаме с 2500 милиона тона въглища и консумацията за година във всеки момент t се задава с функцията $y(t) = 20 + 1.2\,t$ милиона тона, то за колко години запасите ни ще бъдат изчерпани?

Решение: Количеството въглища се пресмята с определен интеграл и то ще бъде изчерпано, когато стойността на този интеграл е равна на 2500. Следователно трябва да намерим горната граница b на този интеграл, т.е.

$$\int_0^b (20 + 1.2t)\, dt = 2500$$

Пресмятаме интеграла и получаваме

$$(20t + 0.6t^2)\Big|_0^b = 2500$$

$$0.6b^2 + 20b = 2500$$

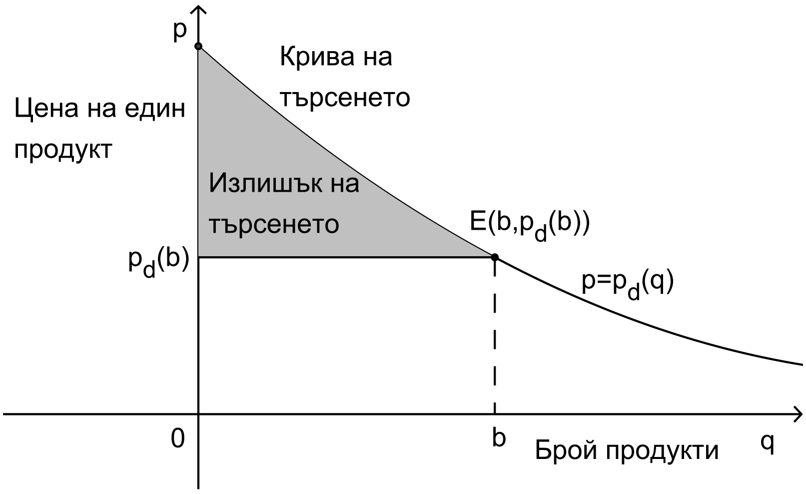
$$3b^2 + 100b - 12500 = 0.$$

Това квадратно уравнение има два корена $b = -\frac{250}{3}$ и $b = 50$. Тъй като единият корен е отрицателен, то запасите ще стигнат за 50 години.

Излишък на търсенето

В икономическите модели се предполага, че всички потребители плащат една и съща цена за единица продукт. Тази цена е резултат на противоречащи си интереси на пазара между търсене и предлагане и е продукт на баланса между това, което потребителите желаят и могат да платят и количеството, което производителите желаят и могат да произведат/доставят.

Да разгледаме първо ситуацията от гледна точка на потребителите. Икономистите използват намаляващи функции, наречени **криви на търсенето (demand curves)**, за да представят зависимостта между броя продукти q, търсени от потребителите и $p_d(q)$ - цената за единица продукт.



Фиг. 1

На Фиг. 1 е показана такава крива на търсене. От нея се вижда добре познатия ни факт, че когато цената е ниска имаме голямо търсене, а когато е висока - слабо търсене.

Точката $E(b, p_d(b))$ е **точката на равновесие (equilibrium point)** между търсенето и предлагането.

Лицето на областта между кривата и абсцисната ос

$$\int_0^b p_d(t)\, dt,$$

представлява количеството пари, които потребителите са дали за покупката на b броя продукти.

Ако този брой беше продаден на цената, която имаме при равновесието на пазара $p_d(b)$, то количеството пари, които потребителите биха дали е $b\, .p_d(b)$, което е лицето на правоъгълника под сивата част.

Тогава е напълно естествено разликата

$$\int_0^b p_d(q)\, dq \; - \; b.p_d(b)$$

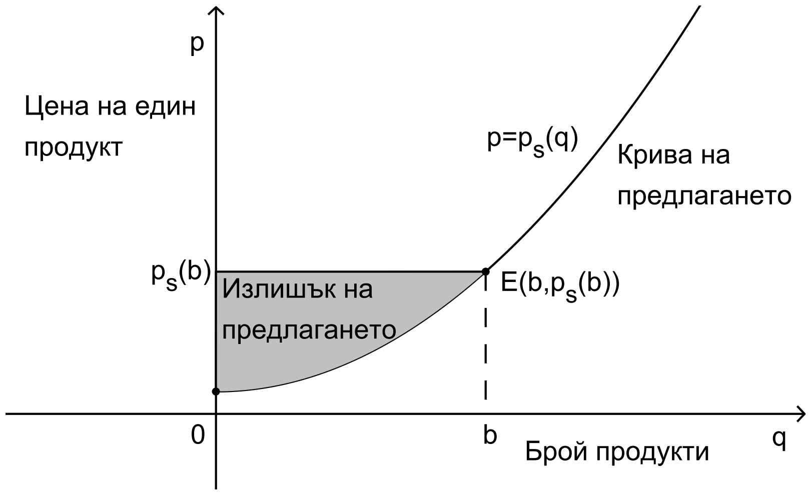
да приемем за мярка за изгодата, която потребителите имат от това, че на пазара има сблъсък на търсене и предлагане, което води до намаляване на цената.

Тази разлика се нарича **излишък на търсенето (consumers' surplus)** и ще бележим с **CS**.

$$CS \; = \; \int_0^b p_d(q)\, dq \; - \; b.p_d(b)$$

Излишък на предлагането

Аналогично, ако разгледаме ситуацията от гледната точка на производителите,



Фиг. 2

разликата

$$b.p_s(b) \; - \; \int_0^b p_s(q)\, dq$$

се нарича **излишък на предлагането (producers' surplus)** и ще бележим с **PS**.

$$PS \; = \; b.p_s(b) \; - \; \int_0^b p_s(q)\, dq$$

5.18 Пресметнете CS, ако кривата на търсенето е $p_d(q) = \dfrac{80}{(0.2+0.1q)^2}$, където q е в милиона тона и $p_d(q)$ е в евро за тон. Равновесието на пазара се достига при 18 милиона тона.

Решение: Пресмятаме $p_d = \dfrac{80}{(0.2+1.8)^2} = \dfrac{80}{4} = 20$

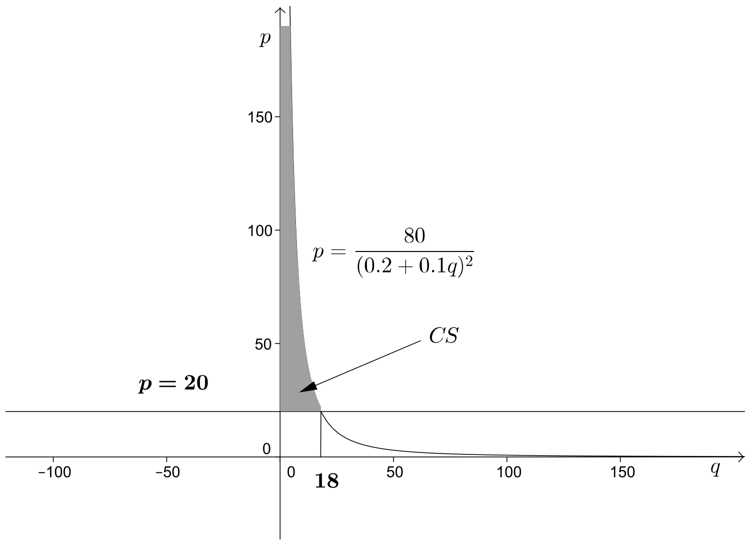
Сега имаме

$$CS \; = \; \int_0^{18} \frac{80}{(0.2+0.1q)^2}\, dq \; - \; 18.20 =$$

$$= \; 10 \int_0^{18} \frac{80}{(0.2+0.1q)^2}\, d(0.1q+0.2) \; - \; 360 =$$

$$= \; 800 \int_0^{18} (0.2+0.1q)^{-2}\, d(0.1q+0.2) \; - \; 360 =$$

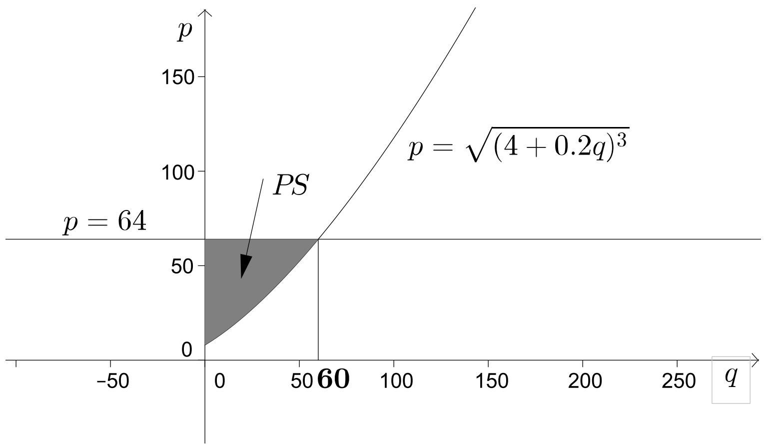
$$= -\left(\frac{800}{0.2+0.1q} \Bigg|_0^{18} \right) - 90 = -400 + 4000 - 360 = 3240.$$



5.19 Пресметнете PS, ако кривата на предлагането е $p_s(q) = \sqrt{(4+0.2\,q)^3}$, където q е брой камиони (в хиляди) и $p_s(q)$ е в евро. Равновесието на пазара се достига при 60 хиляди камиона.

Решение: Първо пресмятаме

$$p_s(60) = \sqrt{(4+12)^3} = \sqrt{4^6} = 64$$



Сега имаме

$$PS = b.p_s(b) - \int_0^b p_s(q)\,dq = 60.64 - \int_0^{60} \sqrt{(4+0.2\,q)^3}\,dq =$$

$$= 3840 - 5\int_0^{60} (4+0.2q)^{\frac{3}{2}}\,d(0.2q+4) =$$

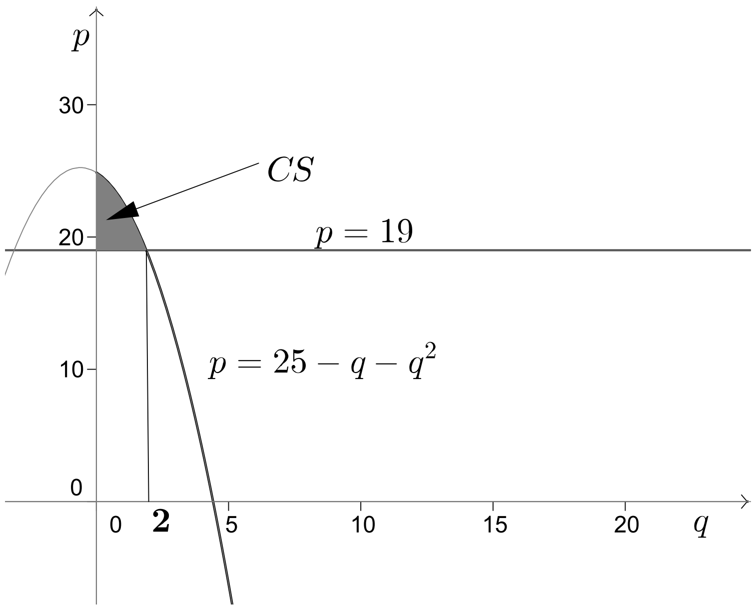
$$= 3840 - 2\left((4+0.2q)^{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^{60} \right) = 3840 - 2(1024-32) = 1856$$

5.20 Пресметнете CS, ако кривата на търсенето е $p_d(q) = 25 - q - q^2$ и равновесието на пазара се достига при цена $p = 19$.

Решение: Първо трябва да намерим количеството продукти b, при което се достига равновесната цена.

Имаме:

$$p_d(b) = 25 - b - b^2 = 19$$



Получаваме квадратното уравнение

$$b^2 + b - 6 = 0$$

Дискриминантата на това уравнение е $D = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$ и следователно корените му са:

$$b_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \qquad b_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Но b не може да е отрицателно и следователно $b = 2$.

Сега имаме

$$CS = \int_0^2 (25 - q - q^2)\, dq \; - \; 2.19 \; = \; 25 \int_0^2 1\, dq - \int_0^2 q\, dq - \int_0^2 q^2\, dq \; - \; 38 =$$

$$= \; 25.2 - \left(\frac{q^2}{2} \bigg|_0^2 \right) - \left(\frac{q^3}{3} \bigg|_0^2 \right) \; - \; 38 \; = \; 12 - 2 - \frac{8}{3} = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$$

Задачи за самостоятелна работа:

5.21 Да се пресметне лицето на областта, заградена от кривата $y = \ln x$ и правите $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$.

Отг. e^2

5.22 Да се пресметне лицето на областта, заградена от абсцисната ос и параболата $y = 3 + 2x - x^2$.

Отг. $\frac{32}{3}$

5.23 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = 2 - x^2$ и правата $y = x$.

Отг. $\frac{9}{2}$

5.24 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = x^2 + 2x$ и правата $y = x + 2$.

Отг. $\frac{9}{2}$

5.25 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y^2 = 4x + 4$ и правата $x + y = 2$.

Отг. $\frac{64}{3}$

5.26 Пресметнете CS, ако кривата на търсенето е $p_d(q) = 28 - q^2$. Равновесието на пазара се достига при $b = 5$.

Отг. $CS = \frac{250}{3}$

5.27 Пресметнете CS, ако кривата на търсенето е $p_d(q) = \frac{12}{q+3}$. Равновесието на пазара се достига при $p_d(b) = 2$.

Отг. $CS = 6(2\ln 2 - 1)$

5.28 Пресметнете PS, ако кривата на предлагането е $p_s(q) = q^2 + 4q + 5$. Равновесието на пазара се достига при $p_s(b) = 10$.

Отг. $PS = \frac{8}{3}$

5.29 Пресметнете PS, ако кривата на предлагането е $p_s(q) = q^2 + q + 3$. Равновесието на пазара се достига при $b = 4$.

Отг. $PS = \frac{152}{3}$

5.30 Пресметнете PS, ако кривата на предлагането е $p_s(q) = q^2+3$. Равновесието на пазара се достига при $p_s(b) = 12$.

Отг. $PS = 18$

5.31 Пресметнете CS и PS, ако кривите на търсенето и на предлагането са съответно $p_d(q) = 16 - q^2$ и $p_s(q) = 2q^2 + 4$.

Отг. $CS = \dfrac{16}{3}$; $PS = \dfrac{32}{3}$

5.32 Пресметнете CS и PS, ако кривите на търсенето и на предлагането са съответно $p_d(q) = 20 - 3q - q^2$ и $p_s(q) = q - 1$.

Отг. $CS = \dfrac{63}{2}$; $PS = \dfrac{9}{2}$

Глава 6

Обикновени диференциални уравнения

Основни понятия и дефиниции

Уравнение, в което неизвестното е функция на една или няколко променливи и тя участва заедно със свои производни или диференциали, се нарича **диференциално уравнение**. Ако неизвестната функция е функция на няколко променливи, т.е. тя участва в уравнението заедно със свои частни производни, уравнението се нарича **частно диференциално уравнение**. Ако неизвестната функция е функция на една променлива, то уравнението се нарича **обикновено диференциално уравнение**. Ние ще разгледаме само обикновени диференциални уравнения с разделени променливи.

Ред на диференциално уравнение наричаме най-високия ред на производните на функцията, участващи в уравнението.

Общият вид на уравнение от $n-$ти ред е

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad x \in (a, b) \tag{6.1}$$

Решение на диференциалното уравнение (6.1) наричаме всяка функция $y = \varphi(x)$, която го превръща в тъждество. Графиката на едно решение на диференциално уравнение се нарича **интегрална крива.** Ние ще отъждествяваме тези две понятия.

В тази глава ще разгледаме само един вид **диференциални уравнения от първи ред**. Нека $y = y(x)$, $\quad x \in (a, b)$. Общият вид на уравнение от първи ред е

$$F(x, y, y') = 0 \tag{6.2}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{6.3}$$

ако уравнението (6.2) е решено относно производната.

Например, уравнението $y' = 2x$ е уравнение от първи ред и $y(x) = x^2$ е решение на уравнението, защото $(x^2)' = 2x$. Нещо повече, и функциите $y(x, C) = x^2 + C$

(*еднопараметрична фамилия параболи*), където C е произволна константа, също са решения, защото отново $(x^2 + C)' = 2x$.

Функцията $y = \varphi(x, C)$, която превръща уравнението (6.2) в тъждество, се нарича **общо решение** на уравнението.

Равенство от вида $\Phi(x, y, C) = 0$, което задава общото решение в неявен вид, се нарича **общ интеграл**.

Частно решение на (6.2) е такова решение, което се получава от общото решение за конкретна стойност на константата C.

Особено решение на (6.2) е такова решение, което не може да се получи от общото решение за никаква стойност на константата C.

6.1 Да се намери диференциалното уравнение, чието общо решение е фамилията криви линии

$$y = (x - C)^2 \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{6.4}$$

Решение: Диференцираме (6.4) относно x и получаваме

$$y' = 2(x - C) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{6.5}$$

От (6.5) $\Rightarrow$ $x - C = \dfrac{y'}{2}$ и замествайки в (6.4) получаваме

$$y'^{\,2} = 4y$$

Уравнения с разделени променливи

Ако запишем функцията $f(x, y)$ във вида $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$ и отчетем, че $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнението (6.3) можем да запишем в така наречената симетрична форма

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{6.6}$$

Ако функцията $M(x, y)$ е функция само на променливата x, т.е $M(x, y) = M(x)$, а $N(x, y)$ зависи само от променливата y, т.е $N(x, y) = N(y)$, то уравнението (6.6) добива вида

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0 \tag{6.7}$$

и се нарича уравнение с **разделени променливи**.

Решаването на това уравнение става с непосредствено интегриране на (6.7):

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C.$$

Но $\int M(x)\, dx = \varphi(x)$, а $\int N(y)\, dy = \psi(y)$ и решението има вида $\varphi(x) + \psi(y) - C = 0$, което означава, че обикновено решението се получава в неявен вид $\Phi(x, y, C) = 0$.

6.2 Решете уравнението $yy' - x = x^2$.

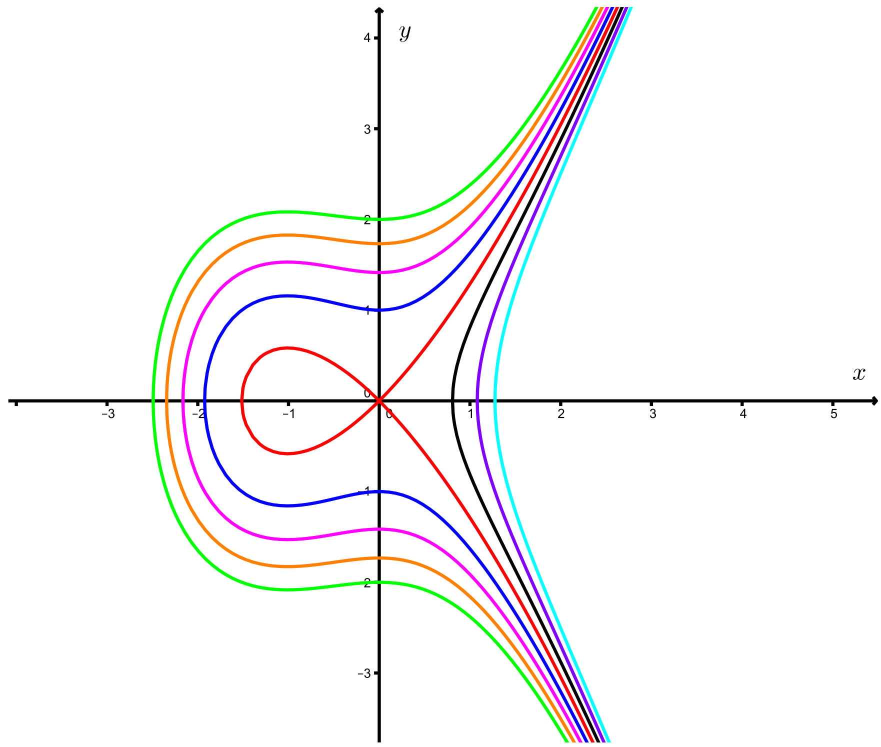
Решение: Преобразуваме уравнението и получаваме

$$yy' = x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad y\,\frac{dy}{dx} = x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad y\,dy = (x^2 + x)\,dx,$$

което е уравнение с разделени променливи. Интегрираме и получаваме

$$\int y\,dy = \int (x^2 + x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

На следващата фигура са представени 8 криви от фамилията криви линии $C = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$.



6.3 Решете уравнението $(1 + x)y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0$.

Решение: Разделяме двете страни на уравнението с $xy \neq 0$ и получаваме

$$\frac{1 + x}{x}\,dx + \frac{1 - y}{y}\,dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad dx + \frac{1}{x}\,dx = dy - \frac{1}{y}\,dy$$

Интегрираме и получаваме общия интеграл

$$\int dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \int dy - \int \frac{1}{y}\,dy \quad \Rightarrow \quad x + \ln|x| = y - \ln|y| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|xy| + x - y = C$$

От $xy = 0$ получаваме още две решения: $x = 0$ и $y = 0$. Те не могат да се получат от общия интеграл и следователно са особени решения.

Както знаем в конкурентен пазар скоростта, с която цената p на даден продукт се настройва към равновесната си стойност зависи от това какво е търсенето на пазара. Ако потребителите желаят и имат възможност да закупят много повече продукция, отколкото производителите и търговците са склонни да доставят по текущата цена, тогава ще има голям натиск върху цените и те ще се покачват. Ако, обаче има само лек недостиг на продукти, то след малка корекция на цената този натиск ще бъде слаб. Ако търсенето е отрицателно тава означава, че доставеното количество превишава търсенето и в този случай цените ще започнат да паднат.

В предишната глава търсенето и предлагането бяха функции на броя продукти q. Нека сега търсенето и предлагането са линейни функции на цената p

$$q_d(p) = a + b.p \qquad \text{и} \qquad q_s(p) = c + d.p, \tag{6.8}$$

където $a, d > 0$ и $b, c < 0$.

Ако с k означим коефициента, който отразява степента на регулиране на цената p пропорционално на търсенето, тогава можем да напишем, че

$$\frac{dp}{dt} = k[q_d(p) - q_s(p)]$$

Замествайки $q_d(p)$ и $q_s(p)$ с техните равни от (6.8), получаваме

$$\frac{dp}{dt} = k[(a + b.p) - (c + d.p)] = k(a - c + b.p - d.p) = k(b - d)p + k(a - c),$$

което е уравнение с разделени променливи.

6.4 Нека кривите на търсенето и предлагането са

$$q_d(p) = 170 - 8p \qquad \text{и} \qquad q_s(p) = 4p - 10,$$

и $k = 0,5$. Ако в началото цената е била $p_0 = p(0) = 10$ и тя не е цената на равновесието, то при каква цена ще настъпи равновесие на пазара? Обяснете поведението на пазара.

Решение:

$$\frac{dp}{dt} = 0,5(q_d(p) - q_s(p)) = 0,5[(-12p) + 180] = -6p + 90$$

Следователно уравнението е

$$\frac{dp}{dt} = -6p + 90$$

Това уравнение е с разделени променливи и неговото решение е

$$\frac{dp}{90 - 6p} = dt$$

$$\int \frac{1}{15 - p}\, dp = \int 6\, dt$$

$$\int \frac{1}{p-15}\, d(p-15) = -\int 6\, dt$$

$$\ln|p-15| = -6t + C$$

При $t = 0$ знаем, че $p_0 = p(0) = 10$ и следователно

$$\ln 5 = C$$

Следователно

$$\ln|p-15| = -6t + \ln 5$$

$$\ln|p-15| - \ln 5 = -6t$$

$$\ln\left|\frac{p-15}{5}\right| = -6t$$

$$\left|\frac{p-15}{5}\right| = e^{-6t}$$

Ако $p-15 \geq 0$, то $p(t) = 15+5e^{-6t}$ и получаваме противоречие с началното условие.

$$\Rightarrow \qquad \frac{p-15}{5} = -e^{-6t}$$

$$\Rightarrow \qquad p(t) = 15 - 5e^{-6t}$$

Следователно равновесната цена е 15 и пазарът ще бъде стабилен, защото експоненциалната функция e^{-6t} с нарастване на времето ще клони към нула. Равновесната цена се достига бързо. Например, при $t = 2$ тя вече е $p(2) = 14,99997$ и след това ще остане стабилна.

6.5 Боряна си приготвила овесена каша и забелязала, че температурата на кашата намаляла от 100° на 60° за 10 минути. Температурата в стаята е 20°. Колко време още трябва да изчака Боряна, че температурата на кашата да стане 40°?

Решение: Да означим температурата на овесената каша в момента t с $T(t)$. От физиката е известно, че скоростта на изменение на температурата на дадено тяло е пропорционална на разликата от температурата на тялото и на окръжаващата го среда. Следователно процесът на изстиване се характеризира със следното диференциално уравнение с разделени променливи (*знакът минус е защото тялото изстива*).

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \tag{6.9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T-20}\, dT = -k\, dt \quad \Rightarrow \int \frac{1}{T-20}\, dT = -\int k\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{T-20}\, d(T-20) = -\int k\, dt \quad \Rightarrow \ln|T-20| = -k.t + \ln|C| \quad \Rightarrow \ln\left|\frac{T-20}{C}\right| = -k.t$$

Следователно общото решение на уравнението (6.8) е

$$T(t) = 20 + C.e^{-kt} \tag{6.10}$$

Сега трябва да определим константите C и k. От началното условие знаем, че при $t = 0$ температурата на овесената каша е 100°. Следователно имаме

$$T(0) = 100 = 20 + C.e^0 = 20 + C, \text{т.е.} \quad C = T(0) - 20 = 80$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = 20 + 80.e^{-kt} \tag{6.11}$$

Следващото условие е, че при $t = 10$ температурата на овесената каша е 60°.

Следователно имаме

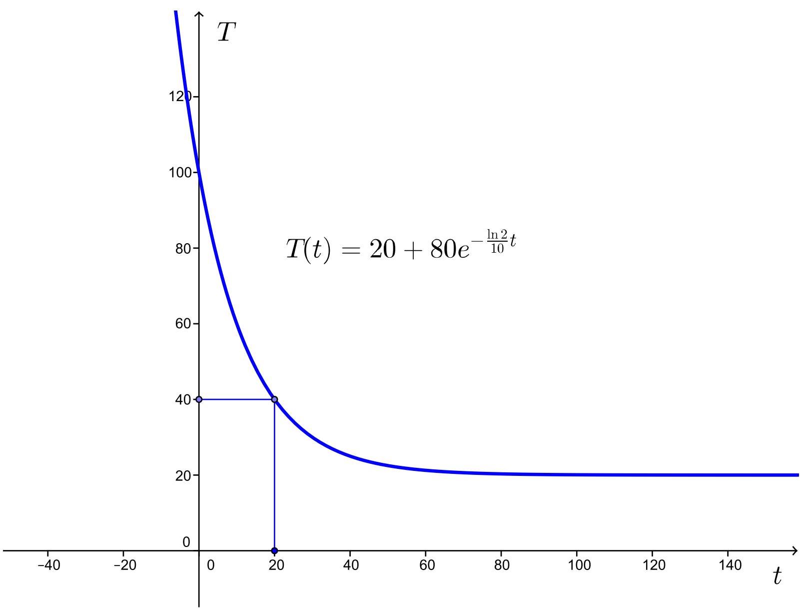
$$T(10) = 60 = 20 + 80.e^{-10k}, \text{ т.е.} \quad 40 = 80.e^{-10k}$$

Следователно

$$e^{-10k} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad -10k = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \qquad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{10}$$

И така, решението е

$$T(t) = 20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{10}.t} \tag{6.12}$$



Сега е лесно да определим за колко време температурата ще стане 40°.

Имаме

$$40 = 20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{10}\cdot t}, \qquad \text{т.е.} \quad e^{-\frac{\ln 2}{10}\cdot t} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\ln 2}{10}\cdot t = -\ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10\cdot\frac{\ln 4}{\ln 2} = 10\cdot\frac{2\ln 2}{\ln 2} = 20$$

Тъй като Боряна е чакала вече 10 минути, то трябва да изчака още 10 минути.

Задачи за самостоятелна работа:

Решете уравненията:

6.6 $(1+x^2)y\,dx + (1-y^2)x\,dy = 0$ — Отг. $x^2 - y^2 + 2\ln|xy| = C$

6.7 $(1-y^2)x\,dx + (1+x^2)y\,dy = 0$ — Отг. $|y^2-1| = C(x^2+1)$

6.8 $y' = y(x^2+e^x)$ — Отг. $3\ln|y| = x^3 + 3e^x + C$

6.9 $(x^2+4).y' = 2xy$ — Отг. $y = C(x^2+4)$

6.10 $y' = -x.e^y$ — Отг. $2e^{-y} - x^2 = C$

6.11 $x(y+2).y' = \ln x + 1$ — Отг. $2y^2 + 4y = (\ln x + 1)^2 + C$

6.12 $(1+e^x)\,dy = e^x\,dx$ — Отг. $y = \ln(e^x+1) + C$

6.13 $e^{y-x^2}\,dy - 2x\,dx = 0$ — Отг. $y = \ln(e^{x^2}+C)$