3 Точност на измерванията (основни сведения от теорията на грешките)

Теоретична обосновка

Измерването на една физична величина се извършва чрез прякото й или косвено сравнявана с величина от същия вид, *приета* за единица. Например при измерване на дължина трябва да се установи колко пъти в нея се нанася приетата единица за дължина – метърът. Отношението на измерваната величина A към нейната измерителна единица $[A]$ се нарича *числена стойност* или накратко *стойност* на измерваната величина $\{A\} = A / [A]$. От този израз се получава $A = \{A\}[A]$. Следователно резултатът от измерването се състои от две части: числото $\{A\}$ и единицата $[A]$. Например изразът $m = 0{,}24$ kg означава, че за измервателна единица е взета $[m] = 1$ kg и че масата на тялото m е 5 пъти по-малка от 1 kg ($\{m\} = 0{,}24$).

Измерванията са *преки*, когато изследваната физична величина се определя чрез непосредствено отчитане на измервателния уред и *косвени*, когато физичната величина се намира въз основа на известна зависимост между нея и пряко измервани величини. Измерванията на големината на електричния ток с амперметър, на температурата с термометър и др. са преки измервания. Пример за косвено измерване е определянето на скоростта на едно тяло, движещо се равноускорително без начална скорост $v = 2s/t$.

При измерване не е възможно да се получи абсолютно точната, истинска стойност на измерваната физична величина. Получава се само приблизителната й стойност, съдържаща винаги някаква грешка, т. е. измерването се извършва с някаква точност.

Под *точност* на измерването се разбира най-малката част от измерителната единица, до която със сигурност може да се извърши измерването. Степента на точност на едно измерване зависи от използуваните уреди и методи на измерване.

Задачата на едно измерване е да се намери не само приблизителната стойност, най-близка до истинската на измерваната величина, но и да се направи оценка на допуснатата грешка при измерването, да се определи интервалът в който със сигурност се намира измерваната величина.

Грешка на една величина се нарича разликата между измерената и точната (истинската) стойност. Причините за възникване на грешките могат да бъдат най-различни. Поради несъвършенство на измервателните уреди, не-съвършенство на сетивните органи, избрания метод на измерване, влияние на странични фактори и др. По своя характер грешките се делят на три вида: *груби, систематични* и *случайни*.

Грубите грешки представляват неоправдано големи отклонения от истинската стойност на измерваната величина. Те могат да се дължат на небрежност, неопитност, умора, грубо нарушаване методиката на измерване и на др. причини, които довеждат до неправилна подготовка на уреда за работа (не се нивелира, не се включва правилно и пр.), неправилно записване на показанията (вместо 2,15, записано 21,5)... Ако наблюдателят измерва с мащаб, на който големите единици са разделени на 5, а не на 10 части, а той смята всяко деление за 0,1 вместо 0,2, се допуска груба грешка. Тези грешки могат да бъдат отстранени чрез повторни измервания. При пресмятане данните с груби грешки се отхвърлят и се правят допълнителни (контролни) измервания.

Систематични грешки са грешките, които запазват големината и знака си в серията измервания или се изменят по определен начин. Те отклоняват измерваната величина от истинската й стойност в една посока. Систематичните грешки са: инструментални (грешки на уреда) и методични (грешки на метода).

Инструменталните систематични грешки се обуславят от неточности при направата и градуировката на уредите, от неточно установяване и настройване на уреда, от настъпили изменения в отделни детайли на уреда. Грешките от неточности при направата и градуировката не могат да се отстранят, но може да се определи максималната им големина.

Методични систематични грешки се получават, когато се използват приблизителни формули или когато условията, при които се правят измерванията, се отличават от теоретичните.

Случайни грешки са тези, които се променят по големина и знак при всяко следващо измерване. Причините за тези грешки могат да бъдат: малки промени на налягането, температурата, осветеността на работното място, несъвършенството на зрителните органи на наблюдателя, небрежност при измерванията, несъвършенството на измервателните апарати и др. При отсъствие на систематични грешки случайните предизвикват разсейване на резултатите около истинската стойност. Ако съществува и систематична грешка, резултатите ще са разсеяни, но не около истинската стойност.

Въпросът за намирането и намаляването на грешките е предмет на цяла област в науката, наречена *теория на грешките*, разработена от Гаус при следните *условия*:

1. Грешките имат непрекъснат ред стойности.
2. При голям брой измервания грешките с еднаква големина, но с противни знаци се срещат еднакво често.

3. Вероятността за поява на грешките намалява бързо с увеличаване на техните големини, т. е. малките грешки се срещат по-често от големите.

В теорията на грешките се доказва, че при тези условия най-вероятната стойност на изследваната величина е *средната аритметична* $\bar{x}$ на всички n измерени стойности x_i :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

С увеличаване броя на измерванията средната аритметична се доближава до *истинската стойност* X на измерваната величина. Обаче последната остава неизвестна, затова грешките на резултатите от измерванията се определят спрямо средната аритметична. Величината $\Delta x_i = x_i \quad \bar{x}$ се нарича *абсолютна грешка* на отделното измерване, а величината $\varepsilon_i = \dfrac{\Delta x_i}{x}$ – негова *относителна грешка*. Тя може да се изрази в проценти, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \dfrac{\Delta x_i}{x} 100\%$ - *процентна грешка*. Поради това, че е безразмерна величина, относителната грешка дава възможност да се сравнят грешките при измерване на разнородни величини.

Средно аритметичната стойност на измерваната величина е също приблизителна стойност, затова за характеризиране точността на измерването се въвежда *средноквадратичната грешка* на средния резултат:

$$\Delta\bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}$$

и *процентна грешка на средния резултат*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}}{\bar{x}} 100\%$$

Резултатът от измерванията се записва във вида:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_{\bar{x}}\%$$

Когато величината се измерва пряко еднократно, *абсолютната грешка* Δx се оценява като половин скално деление от скалата на уреда. Относителната грешка е: $\varepsilon_x = \Delta x \,/\, x_{изм}$. Крайният резултат се записва във вида:

$$x = x_{изм} \pm \Delta x$$

$$x = x_{изм} \pm \varepsilon_x \% \,.$$

Методика за обработване на резултатите от косвени измервания

Пресмятането на грешките при косвени измервания се базира на следните ***предположения***:

1. Абсолютните грешки при измерванията са винаги много по-малки по стойност от измерваните величини (разглеждат се като техни безкрайно малки изменения).

2. Ако физичната величина, която се определя косвено, е функция на една или няколко непосредствено измервани величини, то абсолютната грешка на функцията е също безкрайно малка величина.

Например: B е функция на няколко аргумента $B = f(x, y, z, ...)$, където $x, y, z, ...$ са стойностите на пряко измерените величини.

Относителна грешка ε на функцията се определя по следния начин:

1. Логаритмува се функцията $B = f(x, y, z, ...)$

2. Диференцира се получения логаритъм по всички аргументи.

3. Заменят се безкрайно малките $dx, dy, dz, ...$ с абсолютните грешки: $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$ на съответните аргументи. За да се получи максимална грешка, знаците "–" се заменят със знаци "+".

След определяне на относителната грешка се пресмята и абсолютната грешка: $\Delta B = \pm \varepsilon \bar{B}$.

ПРИМЕР: Съпротивлението на консуматор се определя по закона на Ом $I = \frac{U}{R}$. В резултат на едно измерване са получени следните резултати:

1. $U = (220{,}00 \pm 1{,}25)\ \mathrm{V}$, измерено с волтметър с обхват $U_{max} = 250\ \mathrm{V}$ и клас на точност $a_u = 0{,}5$.

***Клас на точност* на един уред с обхват $x_{\max}$ е числото**

$$a_x = \frac{\Delta x}{x_{\max}} 100,$$

където Δx е абсолютната грешка, която допуска при измерване уредът.

2. $I = (340{,}0 \pm 2{,}5)\ \mathrm{mA}$. Големината на тока е измерена с амперметър с обхват $I_{max} = 500\ \mathrm{mA}$ и клас на точност $a_I = 0{,}5$.

3. $R = \frac{220\ \mathrm{V}}{0{,}34\ \mathrm{A}} = 647{,}06\ \Omega$.

За определяне на относителната и абсолютната грешка се прилага логаритмуване и диференциране:

$$lnR = lnU - lnI$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1{,}25}{220} + \frac{2{,}5}{340} \approx 0{,}006 + 0{,}007 = 0{,}013 = 1{,}3\ \%$$

$$\Delta R = \frac{\Delta R}{R} R = 0{,}013.647{,}06\,\Omega = 8\,\Omega$$

$$R = (647 \pm 8)\ \Omega$$

$$R = 647\,\Omega \pm 1{,}3\ \%$$

Гореизложените правила са обобщени в следната таблица.

Формула	Големина на грешката	
	абсолютна	относителна
$B = B_1 + B_2 + B_3$	$\Delta B_1 + \Delta B_2 + \Delta B_3$	$\frac{\Delta B_1 + \Delta B_2 + \Delta B_3}{B_1 + B_2 + B_3}$
$B = B_1 B_2$	$\Delta B_1 + \Delta B_2$	$\frac{\Delta B_1 + \Delta B_2}{B_1 \quad B_2}$
$B = xy$	$y\Delta x + x\Delta y$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$B = x^n$	$n x^{n\ 1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$B = \sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}\ 1} \Delta x$	$\frac{1}{n} \frac{\Delta x}{x}$
$B = \frac{x}{y}$	$\frac{y\,\Delta x + x\,\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$B = \sin x$	$\cos x\,\Delta x$	$ctg\,x\,\Delta x$
$B = \cos x$	$\sin x\,\Delta x$	$tg\,x\,\Delta x$
$B = tg\,x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$

5 Графично представяне на резултати от измервания

Теоретична обосновка

Резултатите от измерванията могат да се представят по три начина: таблично, графично и аналитично (чрез формули), в зависимост от конкретните цели и задачи, които се поставят при измерванията. Графичното представяне служи за нагледно изобразяване на опитните резултати и за различни изчислителни операции – например; графично диференциране, определяне на емпиричните формули по графичния метод, графична екстраполация, графично решаване на уравнения и др.

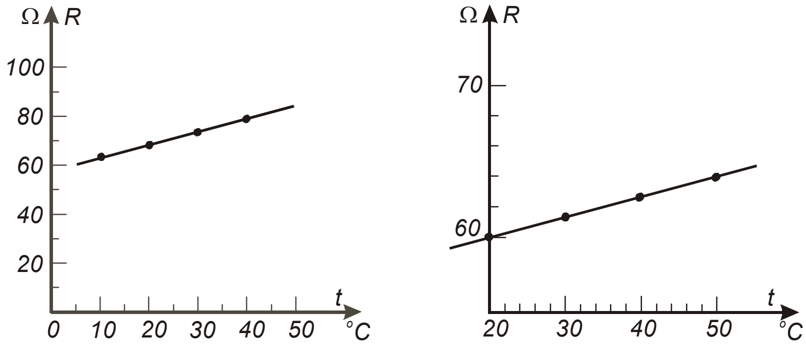
Най-често графичните зависимости се строят в правоъгълна (декартова) координатна система с подходящи мащаби по осите. Стойностите на аргумента се нанасят по абцисната ос X (хоризонталната права), а тези на функцията по ординатата Y (вертикалната права). При избора на мащаба трябва да се спазват следните изисквания:

- Графиката да бъде достатъчно точна; най-малкото разстояние което може да се отчита от нея да бъде не по-малко от абсолютната грешка на измерваната величина.

- Графиката да заема по възможност квадратно пространство т.е. разстоянието между крайните точки до ордината и до абцисната ос да бъдат приблизително равни (ако графиката представлява права линия, тя трябва да е с наклон $\pm 45^\circ$). Отклонения от тези изисквания са възможни, в случаите, когато точността на измерване на едната величина е много по-малка от точността на другата.

- Двете оси на координатната система се разграфяват с чертички (белези) и се получава скалата на координатната ос. Всяка скала има два елемента – интервал и стъпка. Интервал се нарича разстоянието между два съседни белега, а стъпка – разликата между числата на тези белези. Равномерните скали имат както равномерен интервал така и равномерна стъпка. Всяка скала трябва да се "чете" лесно без всякакви пресмятания. Това се постига чрез избор на подходяща стъпка. Удобно е десетичния множител да бъде заедно с измерителната единица. Тогава деленията по осите могат да се отбелязват с 1, 2, 3, ..., а не с 0,00001, 0,00002 или 100 000, 200 000. По осите се поставят цифри за големи мащабни единици. Не е необходим всеки белег (щрих) да "носи" цифра. Осите не бива да се претрупват с цифри. По координатните оси трябва да се записва названието или символа на величината а след него измерителната единица (според стандарта).

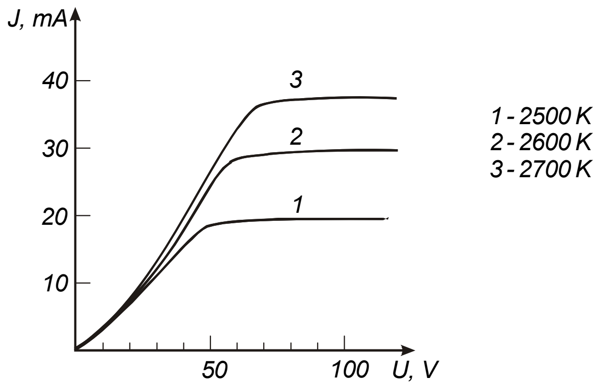
- Необходимо е да се отбележи, че не е задължително началото на координатната система да има координати (0, 0). Началото на координатната система е необходимо да се пренесе в произволна точка, така че да се използва пълно площта на графиката (виж фиг. 5.1). След нанасяне на стойностите на аргумента и функцията в координатната равнина се получава набор от точки. Поради наличието на грешки при измерване на дадена физична величина е неизбежно разсейването на експерименталните точки. За това трябва да се прекара линия не през всички точки, а по възможност плавно, така че еднакъв брой експериментални точки да лежат над и под нея.



правилно неправилно

Фиг. 5.1.

- При нанасяне на няколко криви на една и съща координатна система е необходимо или да се номерира всяка крива или да се използват различни знаци (например кръстчета, кръгчета, триъгълници и др.).



Фиг. 5.2.

В свободното поле се записва названието, означението, числената стойност и измерителната единица на параметъра (виж фиг. 5.2). Освен координатни системи с равномерен мащаб се използват и такива с неравномерен (например логаритмични и полулогаритмични скали). При логаритмичните скали координатите на точките са пропорционални не на самите стойности на нанасяните величини, на логаритмичната функция от тях (например $x = \ln a$, $y = \ln b$, където a и b са измерените стойности.

За графично представяне на зависимости от вида $y = ae^{\pm kx}$ и $x^n y^m = c$ са удобни за полулогаритмична и логаритмична система. Действително уравненията $\ln y = \ln a \pm kx$ и $n\ln x + m\ln y = \ln c$ в такива координатни системи се представят съответно с прави линии. Най-лесно през експерименталните точки е да се прекара права, а сравнително по-трудно парабола, синусоида или друга по-сложна крива.

<u>Задачи и указания за изпълнението</u>

Задача: ***Да се начертае волт-амперната характерната характеристика на резистор и да се определи съпротивлението му.***

Определянето стойността на съпротивлението на резистор графично е един от методите за решаване на тази задача. Той има съществено предимство пред изчислителните методи (в случая използването закона Ом). При построяване на графиката могат да се откри-ят грешки и да се изключи тяхното влияние върху резултата. Построяването на графиката показва, че получените резултати не противоречат на закона на Ом (в случая), показваща линейна зависимост на големината на тока от напрежението.

Определяне на съпротивлението от наклона на правата включва едновременно всички експериментални резултати.

Наклонът на правата се определя по следния начин:

Фиг. 5.3.

- От експерименталната права се избират две точки на които се определят координатите, точка 1 (U_1, I_1), точка 2 (U_2, I_2).
- Определят се съответните изменения на напрежението $\Delta U = U_1 - U_2$ и на тока $\Delta I = I_2 - I_1$.
- Ъгловият коефициент на правата се определя по формулата $tg\,\alpha = \Delta I / \Delta U$.

Сравнява се закона на Ом с уравнение на права (от математиката) и се установява, че стойността на съпротивлението е равно на реципрочната стойност на ъгловия коефициент.

$$I = \frac{1}{R}U, \qquad y = kx, \qquad k = \frac{1}{R}, \qquad \begin{matrix} x \to U \\ y \to I \end{matrix}$$