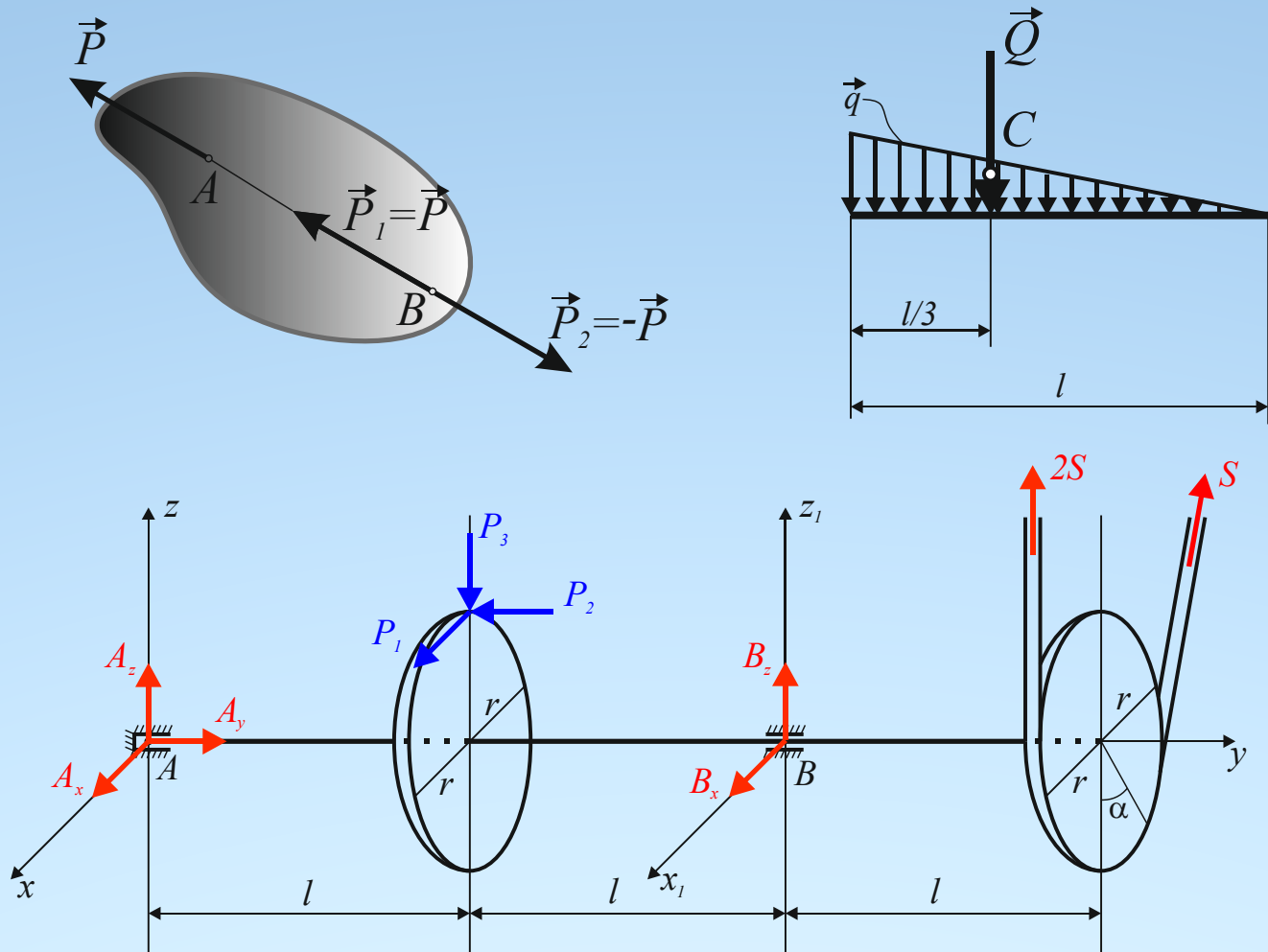
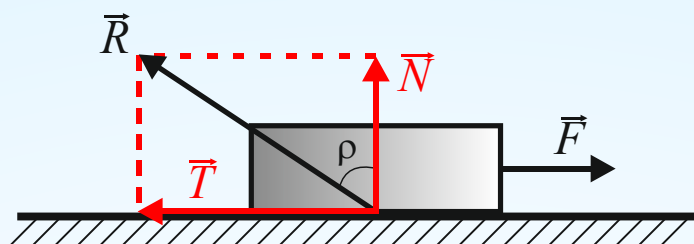


Владимир Дунчев



РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО СТАТИКА



2020

Владимир Дунчев

**Методично ръководство за
решаване на задачи по статика**

УНЕВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО

„ВАСИЛ АПРИЛОВ“

ГАБРОВО, 2020

Методичното ръководство за решаване на задачи по Статика е предназначено за студентите от всички специалности в направления „Машинно инженерство“ и „Общо инженерство“, с цел по-лесно усвояване на учебния материал от раздел Статика на дисциплината Механика I. В него са разгледани различни типове задачи, които могат да послужат като основа за решаване на предвидените в учебния план курсови задачи. Ръководството е структурирано в няколко основни раздела, в които има кратки теоретични пояснения, последвани от решени примери.

Ръководството може да се използва като основа за решаване на конкретни проблеми в инженерната практиката.

От автора

Владимир Петров Дунчев – автор, 2020

Методично ръководство за решаване на задачи по Статика

Българска

Първо

Рецензент: проф. Йордан Тодоров Максимов, дтн, ктн

ISBN 978-954-683-623-6

Съдържание

Съдържание.....	3
§1. Предмет и задачи на статиката. Основни определения.....	5
1.1. Основни определения.....	5
1.2. Аксиоми на статиката	6
1.3. Събиране и разлагане на сили	7
§2. Конкурентна система сили	12
2.1. Редукция на конкурентна система сили.....	12
2.2. Равновесие на тяло под действие на конкурентна система сили.....	13
2.3. Видове опори	13
§3. Произволна равнинна система сили	17
3.1. Произведение на два вектора	17
3.2. Момент на сила спрямо точка. Теорема на Вариньон	17
3.3. Двоица сили	21
3.4. Редукция на произволна равнинна система сили.....	22
3.5. Равновесие на произволна равнинна система сили.....	23
§4. Равновесие на система от тела	30
4.1. Триванни рамки.....	30
4.2. Герберови греди.....	37
4.3. Фермови конструкции.....	42
§5. Произволна пространствена система сили	50
5.1. Момент на сила спрямо ос.....	50
5.2. Редукция на произволна пространствена система сили	52
5.3. Равновесие на тяло под действие на произволна пространствена система сили ..	56
§6. Център на тежестта	58
6.1. Система успоредни сили.....	58

6.2. Център на система успоредни сили	59
6.3. Център на тежестта на разпределени товари	60
§7. Триене	61
7.1. Триене при покой и при плъзгане	61
7.2. Триене при търкаляне	63
ЛИТЕРАТУРА	66

§1. Предмет и задачи на статиката. Основни определения

Количествената мярка за механичното взаимодействие между телата, се нарича сила. Силата е векторна величина, която има приложна точка, направление, големина и посока. Големината ѝ се измерва в [N] („Нютон“).

Статиката като раздел от Теоретичната механика, изучава две основни задачи:

1. **Задача за редукция на система сили** Целта на решаването на тази задача е първоначално зададена система от сили да бъде заменена с по проста еквивалентна на нея система от сили. Ако е възможна замяна с една единствена сила, то тя се нарича равнодействаща.

2. **Задача за равновесие на система сили** Целта на решаването на тази задача е определяне на неизвестните сили, които възникват в местата на взаимодействие на телата с неподвижната среда.

1.1. Основни определения

Равновесие – състояние на покой на тялото по отношение на други материални тела, чието движение може да се пренебрегне;

Система сили – съвкупност от сили, приложени върху твърдо тяло;

Условия за равновесие на система сили – условията, които трябва да удовлетворява дадена система от сили, приложена върху твърдо тяло, така че то да е в равновесие;

Свободно тяло – тяло, което не е свързано с други тела и на което може да се съобщи произволно преместване в пространството;

Еквивалентна система сили – система от сили, приложена върху свободно твърдо тяло, която може да замени друга система сили без да промени начина въздействие върху тялото;

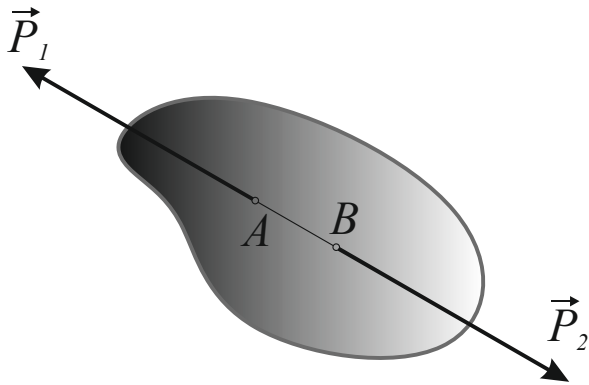
Самоуравновесена система сили – система от сили, под действие на която свободно твърдо тяло се намира в равновесие;

Равнодействаща сила – ако дадена система сили е еквивалентна на една сила, то последната се нарича равнодействаща;

Уравновесяваща сила – сила, имаща големината на равнодействащата и същото направление, но противоположна посока.

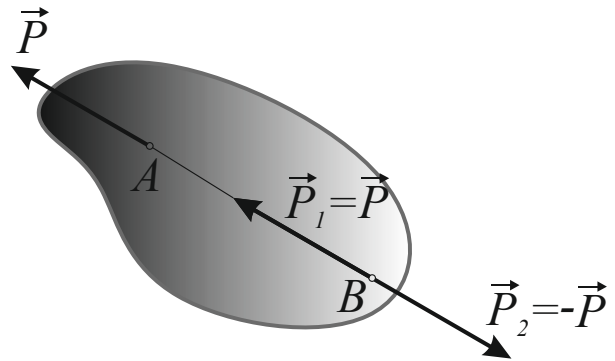
1.2. Аксиоми на статиката

Аксиома 1 – Две сили, приложени върху идеално твърдо тяло, се уравновесяват взаимно тогава и само тогава, когато имат равни големини, обща директриса и противоположни посоки. (фиг. 1.1)



$$\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$$

фиг. 1.1

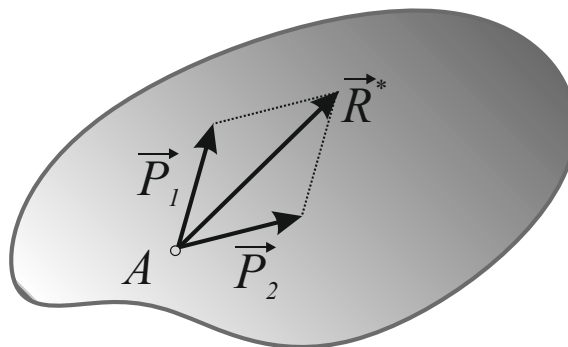


фиг. 1.2

Аксиома 2 – Ако към дадена система сили, приложена върху идеално твърдо тяло, се прибавят или премахнат самоуравновесени системи сили, действието на дадената система сили не се променя.

Следствие от първите две аксиоми е възможно една сила, действаща върху идеално твърдо тяло, да бъде плъзната по направлението си без това да измени нейното действие върху тялото. (фиг. 1.2)

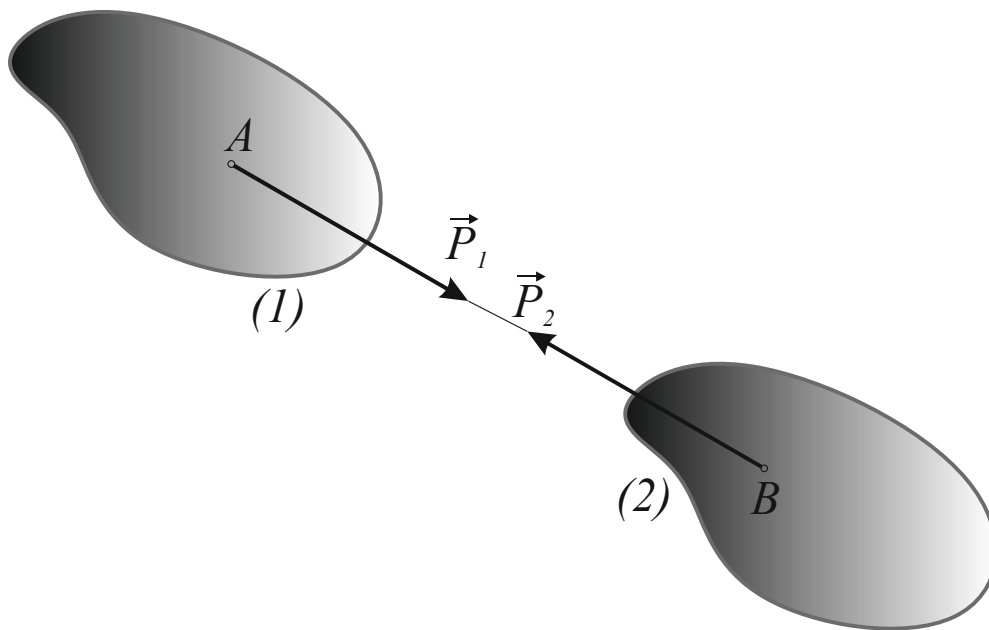
Аксиома 3 – (Правило на успоредника) – Две сили, приложени в една точка могат да бъдат заменени с една приложена в същата точка и равна на геометричната сума от двете сили. (фиг. 1.3)



$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{R}^*$$

фиг. 1.3

Аксиома 4 – Две тела си взаимодействат винаги с две взаимно-противоположни сили.
(фиг. 1.4)



фиг. 1.4

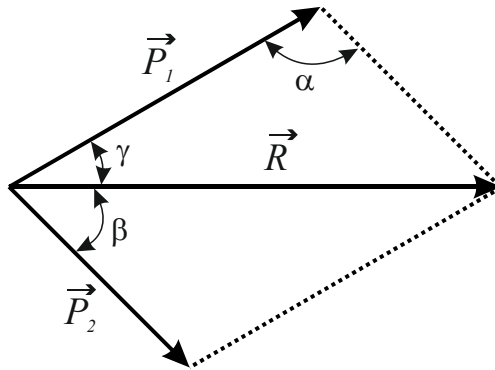
Аксиома 5 – (Принцип на втвърдяването) – Равновесието на едно твърдо деформируемо тяло не се нарушава, ако то се втвърди, т.е. ако се разгледа като идеално твърдо тяло.

Аксиома 6 – (Принцип на освобождаване от връзките) – Равновесието на едно тяло не се променя, ако се освободи от наложените ограничения и на тяхно място се поставят силите, с които те му действат.

1.3. Събиране и разлагане на сили

Събиране на сили

Векторната сума \vec{R} на две сили \vec{P}_1 и \vec{P}_2 се намира или по правилото на успоредника (фиг. 5) или чрез построяване на силов триъгълник, изобразяващ половината от успоредника.



фиг. 1.5

Големината на \vec{R} се намира по косинусова теорема:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos \alpha};$$

Големините на ъглите β и γ се намират чрез синусова теорема:

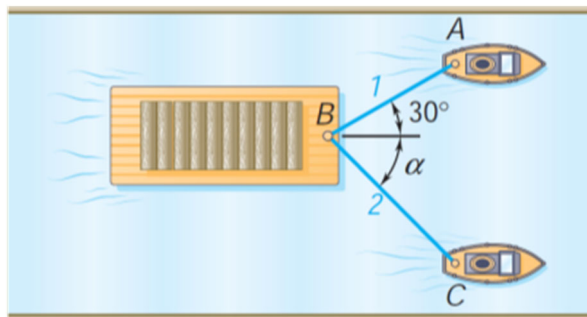
$$\frac{P_1}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \gamma} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

Разлагане на сили

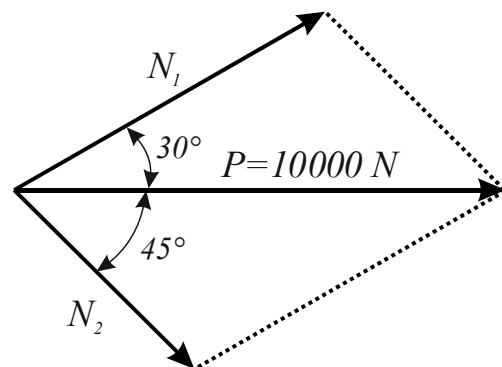
При разлагане на сила на отделни компоненти се решава задача, при която се търси еквивалентна система сили по зададени направления.

Задача 1. Шлеп е теглен от два влекача, както е показано на фиг. 3-1а. Резултантната сила, с която е теглен шлепа е 10 kN.

- Да се намери усилието в двете въжета, ако $\alpha = 45^\circ$;
- Да се намери големината на ъгъл α , при който усилието във въже 2 е минимално.



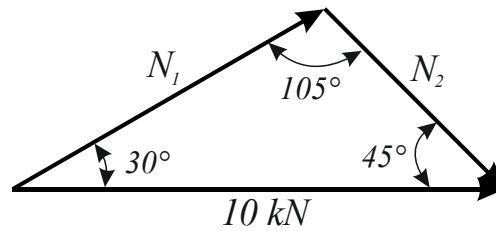
фиг. 3-1а



фиг. 3-1б

Решение:

а) Използва се синусова теорема:

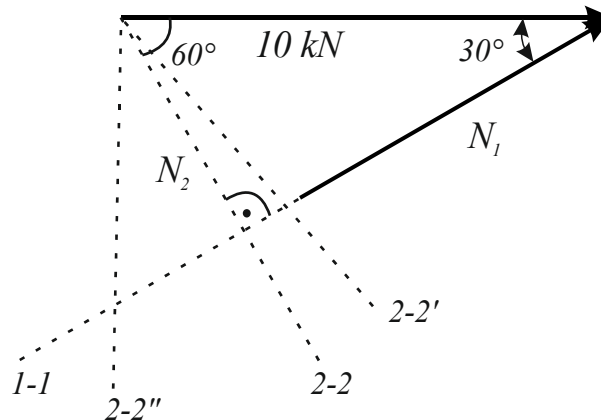


фиг. 3-1в

$$\frac{N_1}{\sin 45^\circ} = \frac{N_2}{\sin 30^\circ} = \frac{10000 \text{ N}}{\sin 105^\circ}$$

откъдето следва: $N_1 = 7320 \text{ N}$ и $N_2 = 5180 \text{ N}$

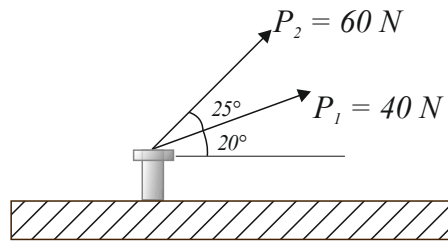
б) За да се намери стойността, при която усиλιето във въже 2 е минимално се използва геометрично решение. Зададени са множество възможни направления на траекторията на въже 2, при постоянно направление на въже 1. От геометричните построения се вижда, че усиλιето във въже 2 ще минимално, когато ъгълът който сключват двете въжета е прав (90°).



фиг. 3-1г

След прости тригонометрични преобразувания излиза, че $N_{2min} = 5000 \text{ N}$.

Задача 2. Две сили P_1 и P_2 са приложени върху болт. Да се намери тяхната равнодействаща.

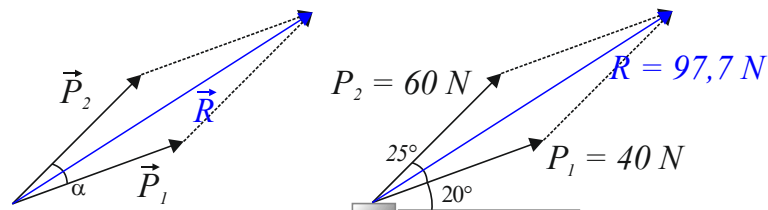


фиг. 3-2

Решение:

Използва се трета аксиома на статиката и косинусова теорема (фиг. 3-2a):

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}$$



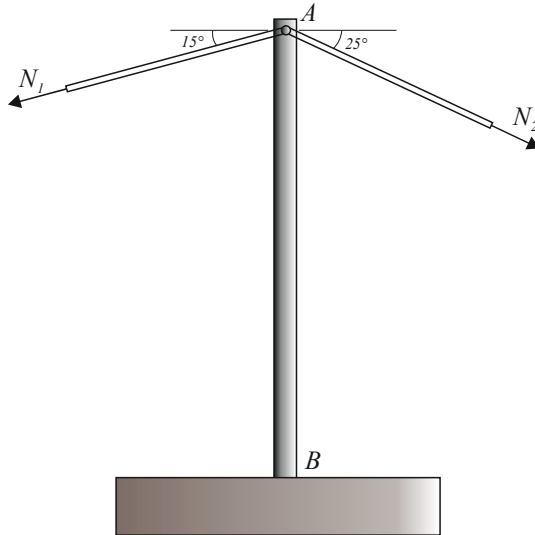
фиг. 3-2a

$$R = \sqrt{40^2 + 60^2 + 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 25^\circ} = 97,7 \text{ N.}$$

Задача 3. Далекопроводен кабел е закрепен в т. А на стълба АВ показан на фиг. 3-3. Известно е усилието в ляво стоящия спрямо стълба кабел, чиято големина е $N_2 = 500 \text{ N}$.

а) Да се определи усилието $N_1 = ? \text{ N}$, ако резултантната сила R е насочена вертикално надолу;

б) Да се определи големината на $R = ? \text{ N}$.



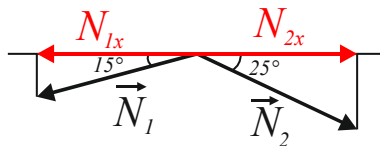
фиг. 3-3

Решение:

Проекциите на усилията в двата кабела по хоризонталната ос трябва да се уравниават, понеже тяхната равнодействаща е насочена вертикално надолу (фиг. 3-3а).

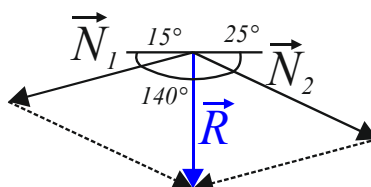
Следователно $N_{1x} = N_{2x}$, където: $N_{2x} = N_2 \cdot \cos 25^\circ = 500 \cdot 0,906 = 453,15 \text{ N}$.

$$N_1 = \frac{N_{1x}}{\cos 20} = \frac{453,15}{0,94} = 482,1 \text{ N}.$$



фиг. 3-3а

Големината на равнодействащата намираме, като използваме трета аксиома и косинусова теорема (фиг. 3-3б).



фиг. 3-3б

От графичното построение за ъгъла между N_1 и N_2 се получава: $\alpha = 140^\circ$.

$$\vec{R} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2,$$

$$R = \sqrt{N_1^2 + N_2^2 + 2N_1N_2 \cos \alpha} = \sqrt{482,1^2 + 500^2 + 2 \cdot 482,1 \cdot 500 \cdot \cos 140^\circ} = 336,32 \text{ N}$$

§2. Конкурентна система сили

Една система сили се нарича конкурентна, ако направлението на всички сили от дадената система сили се пресичат в една точка.

Конкурентната система сили може да бъде: пространствена – директрисите на силите не лежат в една равнина, или равнинна – директрисите на силите лежат в една равнина.

2.1. Редукция на конкурентна система сили

Векторна редукция

$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$, където n е броя на силите, а \vec{R}^* е главен вектор на система сили;

Аналитична редукция

$R_x^* = \sum_{i=1}^n P_{ix}$, $R_y^* = \sum_{i=1}^n P_{iy}$, $R_z^* = \sum_{i=1}^n P_{iz}$ – представляват изразите за аналитична редукция на произволна конкурентна система сили;

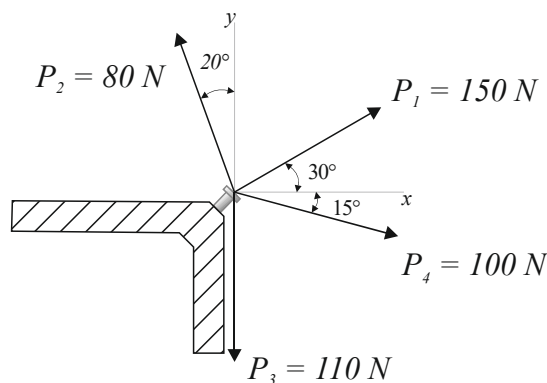
Големината на R^* се намира по Питагорова теорема:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}},$$

а направлението и посоката ѝ се определят от посочните косинуси:

$$\cos \alpha_P = \frac{R_x^*}{R^*}, \cos \beta_P = \frac{R_y^*}{R^*}, \cos \gamma_P = \frac{R_z^*}{R^*}.$$

Задача 4. Четири сили действат върху болт, както е показано на *фиг. 3-4*. Да се извърши аналитична редукция на системата сили.



фиг. 3-4

Решение:

Разлагаме силите на техните проекции по осите x и y.

$$R_x^* = \sum_{i=1}^n P_{ix} \rightarrow R_x^* = P_1 \cos 30^\circ - P_2 \cos 70^\circ + P_4 \cos 15^\circ$$

$$R_y^* = \sum_{i=1}^n P_{iy} \rightarrow R_y^* = P_1 \sin 30^\circ + P_2 \sin 70^\circ - P_3 - P_4 \sin 15^\circ$$

$$R_x^* = 150 * \cos 30^\circ - 80 * \cos 70^\circ + 100 * \cos 15^\circ$$

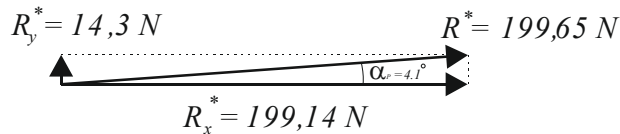
$$R_x^* = 129.9 - 27.36 + 96.6 = 199.14 \text{ N}$$

$$R_y^* = 150 * \sin 30^\circ + 80 * \sin 70^\circ - 110 - 100 * \sin 15^\circ$$

$$R_y^* = 75 + 75.2 - 110 - 25.9 = 14.3 \text{ N}$$

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}} \rightarrow R^* = \sqrt{199.14^2 + 14.3^2} = 199.65 \text{ N}$$

Посоката на равнодействащата намираме посредством посочения косинус спрямо оста x, където $\alpha_p = \cos^{-1} \frac{R_x^*}{R^*} = 4.1^\circ$.



фиг. 3-4a

2.2. Равновесие на тяло под действие на конкурентна система сили

Условия за равновесие

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0;$$

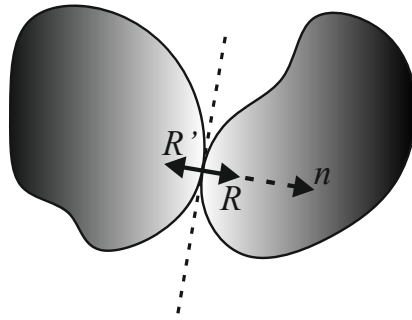
Определяне на опорни реакции

- местата на ограничения на преместванията посредством други тела се наричат опори (или връзки);

- силите, с които опорите противодействат на тялото, се наричат опорни реакции.

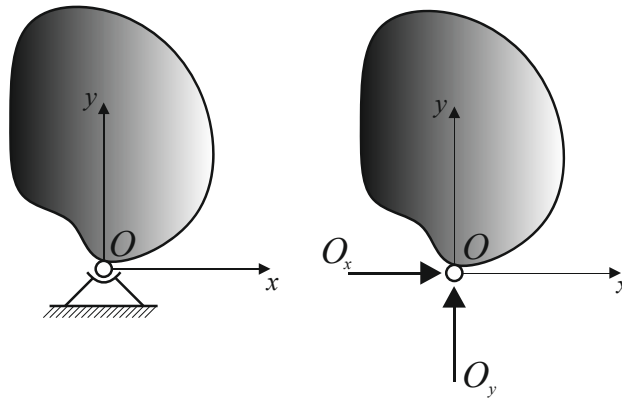
2.3. Видове опори

Непосредствено опирание на тялото (плъзгаща опора) – при ИТТ реакцията на опората е насочена по нормалата към двете допиращи се тела;



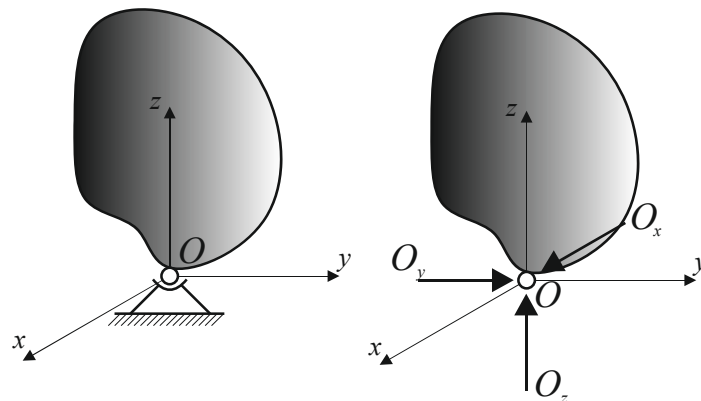
фиг. 2.1

Неподвижна цилиндрична става – отнема две степени на свобода, като тялото може да се завърта спрямо опората в равнината, но са забранени всички премествания на тялото спрямо опората;



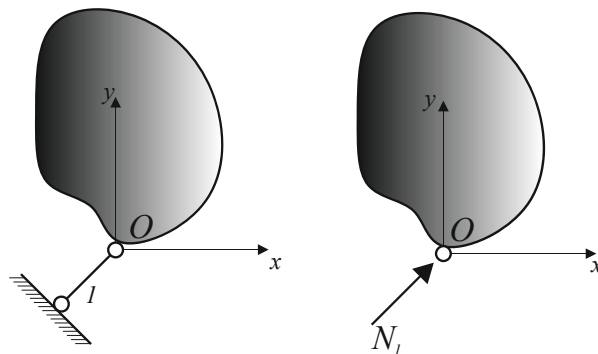
фиг. 2.2

Неподвижна сферична става – сферичната става отнема три степени на свобода, като тялото може да се завърта във всички посоки в пространството, но са забранени премествания във всички посоки;



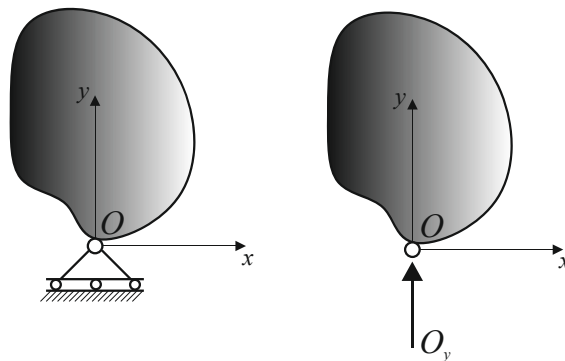
фиг. 2.3

Прътова опора – прътовата опора отнема една степен на свобода, като реакцията в опората е насочена по направление на опората;



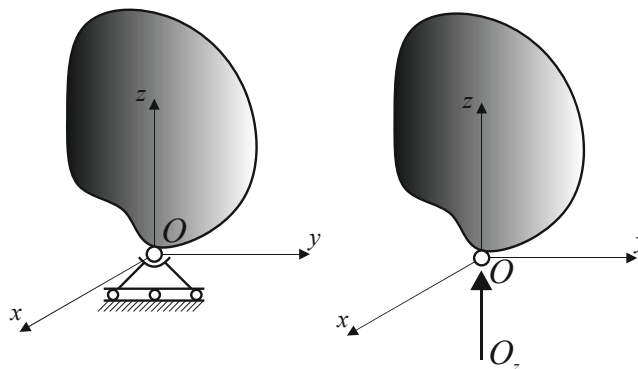
фиг. 2.4

Подвижна цилиндрична става – отнема една степен на свобода, като реакцията в опората винаги е насочена перпендикулярно на неподвижната основа;



фиг. 2.5

Подвижна сферична става – отнема една степен на свобода, като реакцията в опората винаги е насочена перпендикулярно на неподвижната основа;



фиг. 2.6
15

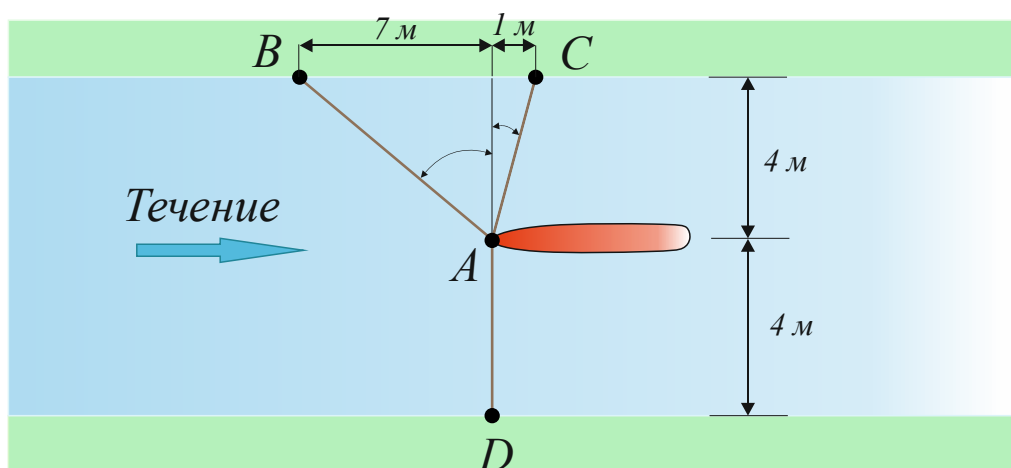
Задача 5. Макет на лодка е изпитван в канал, като е захванат с три въжета към стените на канала (фиг. 3-5). Да се намери с каква сила влияе течението върху лодката, ако усилията във въжетата АВ и AD са съответно $AB=400\text{ N}$ и $AD=600\text{ N}$.

Решение:

Първо намираме големините на ъглите α и β , които сключват въжетата АВ и АС, спрямо сечението на канала.

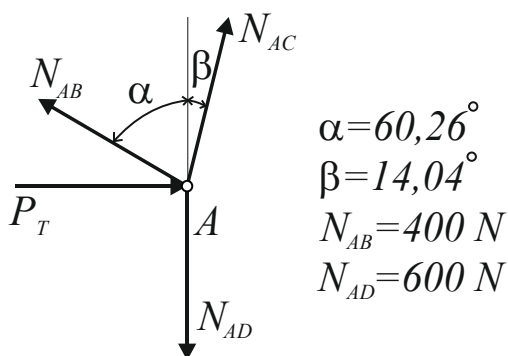
$$\tan \alpha = \frac{7}{4} = 1,75, \text{ откъдето следва че големината на ъгъл } \alpha = 60,26^\circ;$$

$$\tan \beta = \frac{1}{4} = 0,25, \text{ откъдето следва че големината на ъгъл } \beta = 14,04^\circ;$$

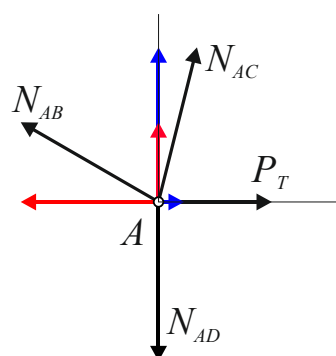


фиг. 3-5

Силите които действат върху върха на лодката образуват самоуравновесена конкурентна система сили. Всички сили са приложени в т. А, като са известни посоките на всички и големините на две от тях. Задачата се решава с графично построение на силите с техните посоки в т. А, както следва:



фиг. 3-5а



фиг. 3-5б

Векторното уравнение за равновесие има следния вид:

$$\vec{R}^* = \vec{P}_T + \vec{N}_{AB} + \vec{N}_{AC} + \vec{N}_{AD} = \vec{0},$$

След разлагане на усилията във въжетата АВ и АС по координатните оси се получават следните аналитични изрази за равновесие:

$$N_{AB} \cos \alpha + N_{AC} \cos \beta - N_{AD} = 0; \rightarrow$$

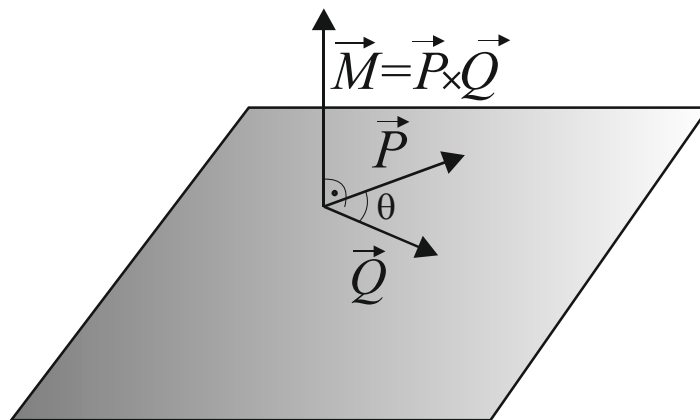
$$400 \cos 60.26 + N_{AC} \cos 14.04 - 600 = 0 \rightarrow N_{AC} = 413.94 \text{ N}$$

$$P_T + N_{AC} \sin \beta - N_{AB} \sin \alpha = 0; \rightarrow P_T = 400 \sin 60.26 - 413.94 \sin 14.04$$

$$P_T = 246.9 \text{ N.}$$

§3. Произволна равнинна система сили

3.1. Произведение на два вектора



фиг. 3.1

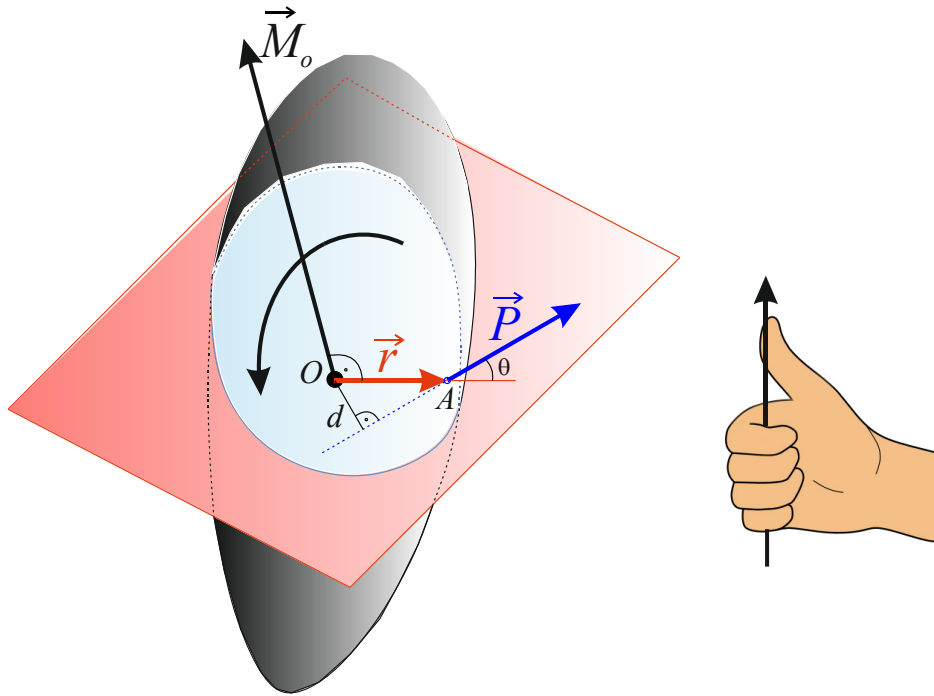
Векторното произведение на два вектора винаги е вектор с направление перпендикулярно на равнината определена от двата вектора (фиг. 3.1). Големината на вектора е равна на произведението на двата вектора умножение по синус от ъгъла, който сключват по между си.

3.2. Момент на сила спрямо точка. Теорема на Вариньон

Момент на сила спрямо точка

Момент на силата \vec{P} , приложена в т. А на тялото, спрямо точка О се нарича векторното произведение $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P}$, като големината на момента се намира по:

$$M_O = r \cdot P \cdot \sin \theta = P \cdot d$$

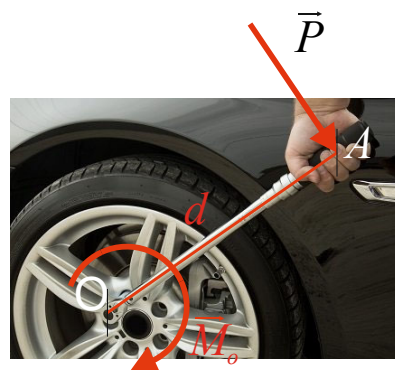


фиг. 3.2

Моментът на силата \vec{P} е положителен, когато се стреми да завърти тялото обратно на часовниковата стрелка и е отрицателен, когато се стреми да го завърти по часовниковата стрелка (фиг. 3.2).



фиг. 3.3а

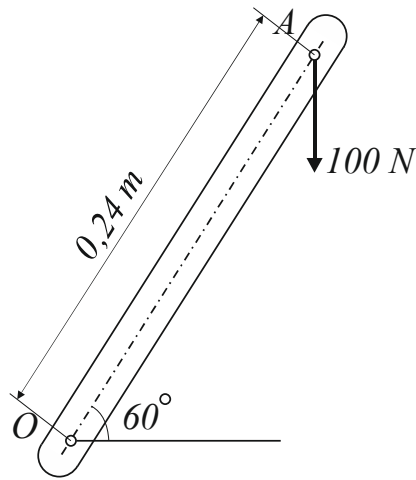


фиг. 3.3б

Теорема на Вариньон

Моментът на равнодействащата на равнинна конкурентна система сили спрямо произволна точка от равнината е равен на сумата от моментите на всички сили от системата спрямо същата точка

Задача 6. Върху лост прикрепен за вал в т. О е приложена вертикална сила с големина 100 N в т. А.

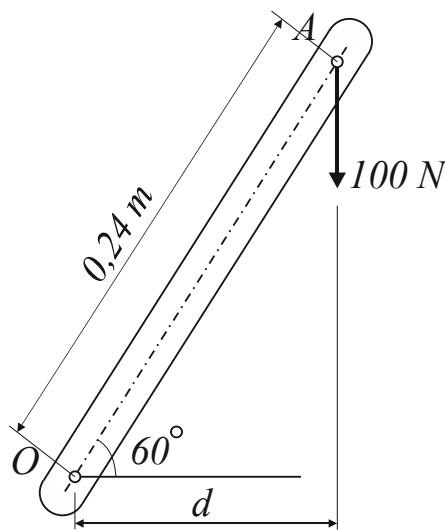


фиг. 3-6

- а) Да се намери големината на момента спрямо т. О от силата, приложена в т. А;
- б) Да се намери големината на хоризонтална сила, приложена в т. А, която създава същия момент като вертикалната сила от а);
- в) Да се намери възможно най-малката сила, приложена в т. А, която създава същия по големина момент спрямо т. О;
- г) На какво разстояние от вала трябва да е приложена вертикална сила с големина 240 N, така че да създава същия по големина момент в т. О;
- д) Има ли сила в подточки б), в) или г), която да е еквивалентна на силата, приложена в подточка а).

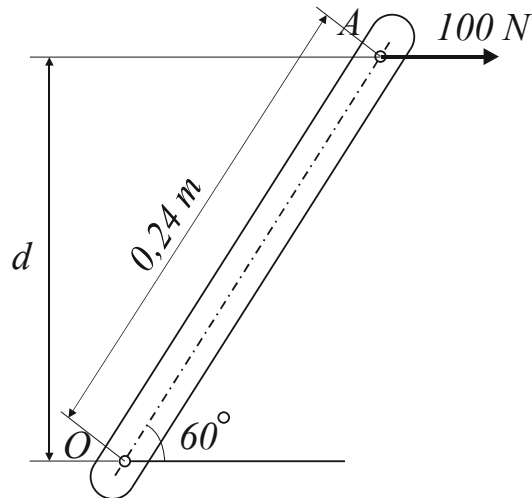
Решение:

а) Разстоянието d между силата и т. О се определя от: $d = 0.24 \cdot \cos 60$, $d = 0.12 \text{ m}$, за момента в т. А се получава: $M_O = 100 \cdot 0,12 = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$



фиг. 3-6а

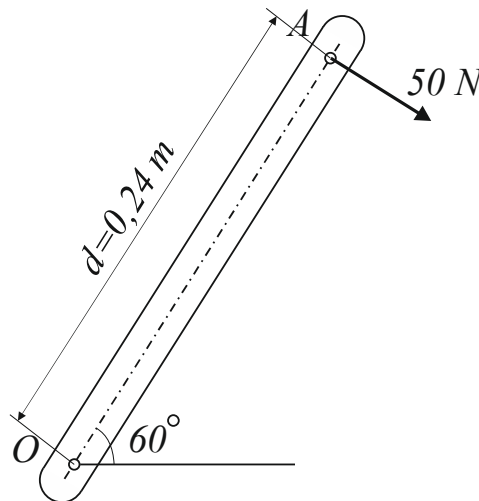
б) Разстоянието между хоризонталната сила и т. О се намира по: $d = 0.24 \cdot \sin 60$,
 $d = 0.208 \text{ m}$, а за силата се получава: $P_h = \frac{M_o}{d} = \frac{12}{0.208} = 57.7 \text{ N}$;



фиг. 3-6б

в) Възможно най-малката сила, приложена в т. А трябва да е на възможно най-голямо разстояние d от т. О. Следователно тя трябва да е перпендикулярна на правата \overline{OA} .

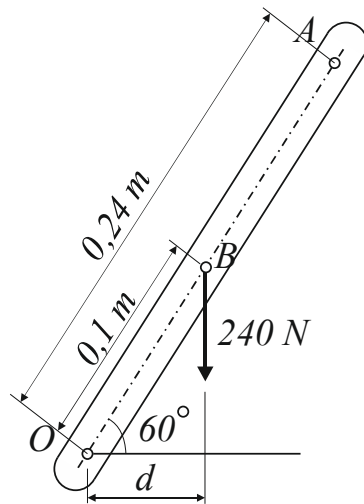
$$P_{\min} \cdot d_{\max} = M_o, P_h = \frac{M_o}{d_{\max}} = \frac{12}{0.24} = 50 \text{ N} ;$$



фиг. 3-6в

г) За да намерим разстоянието, на което трябва да е приложена вертикалната сила, трябва да се намери първо d , след което чрез тригонометрични преобразувания се намира разстоянието между вертикалната сила и т. О

$$d = \frac{M_o}{P} = \frac{12}{240} = 0.05 \text{ m}, \overline{OB} = \frac{d}{\cos 60} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1 \text{ m};$$

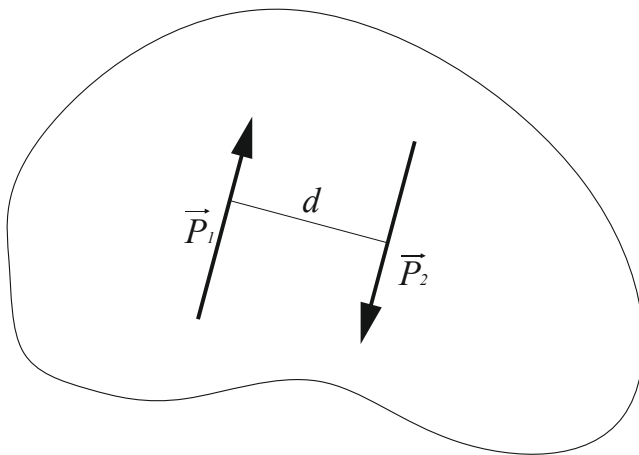


фиг. 3-6г

д) Нито една от посочените сили в б), в) и г) не са еквивалентни на тази от а), защото имат или различна големина или различна посока, въпреки, че създават еднакъв момент спрямо т. О.

3.3. Двоица сили

Система от две сили, които са успоредни, имат еднакви големина и противоположни направления.



фиг. 3.4а



фиг. 3.4б

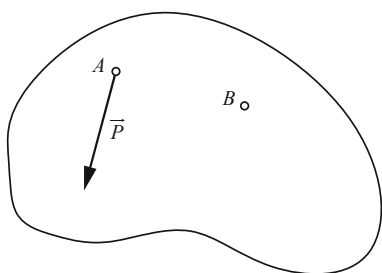
Моментът, който създава двоицата сили е: $M = \mp P \cdot d$, където d е рамо на двоицата, а P е големината на всяка от силите. Моментът на двоицата е положителен, когато

двоицата сили се стреми да завърти тялото обратно на часовниковата стрелка и отрицателен, когато се стреми да завърти тялото по часовниковата стрелка.

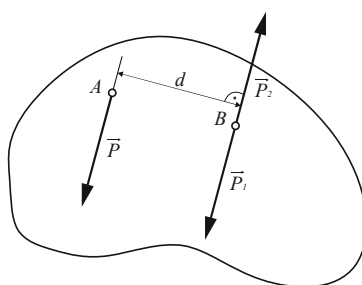
3.4. Редукция на произволна равнинна система сили

Теорема за успоредно пренасяне на сила

Една сила, приложена в т. А от ИТТ, е еквивалентна на същата сила, приложена успоредно в т. В, и една двойца сили, чийто момент е равен на момента на приложената в т. А сила спрямо т. В.

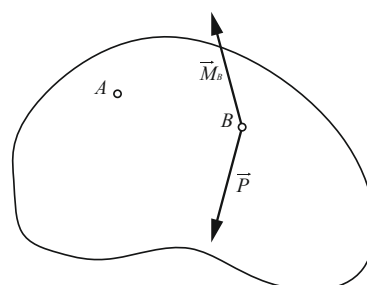


фиг. 3.5а



$$\vec{P} = \vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

фиг. 3.5б



$$M_B = P \cdot d$$

фиг. 3.5в

Аналитична редукция – определят се главния вектор и главния момент произволна равнинна система сили по следните формули:

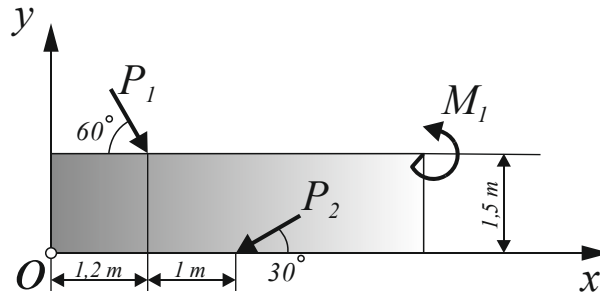
$$- R_x = \sum_{i=1}^n P_{i,x}, R_y = \sum_{i=1}^n P_{i,y}; \rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};$$

$$- M_o = \sum_{i=1}^n M_{i,o};$$

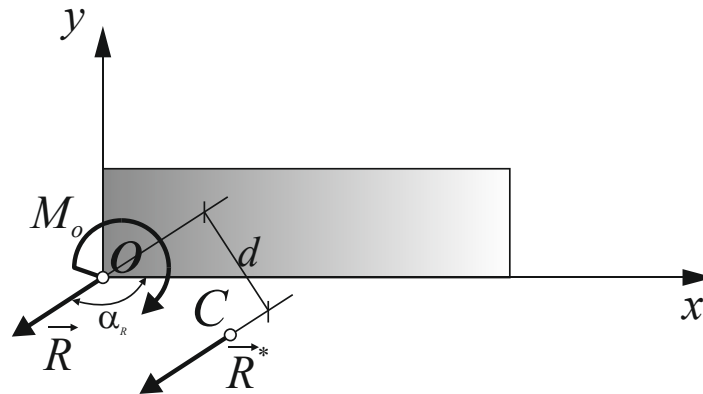
$$- \text{ЪГЪЛЪТ } \alpha_R, \text{ който главният вектор сключва с оста } x \text{ е } \cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}.$$

Ако и главният вектор и главният момент са различни от нула, равнодействащата \vec{R}^* , като се определя разстоянието d между \vec{R}^* и \vec{R} чрез следната формула: $d = \frac{M_o}{R}$, където $R^* = R$.

Задача 7. Да се извърши аналитична редукция на дадената произволната равнинна система сили показана на фигурата, ако $P_1 = 12 \text{ kN}$, $P_2 = 18 \text{ kN}$, $M_1 = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



фиг. 3-7а



фиг. 3-7б

$$R_x = P_1 \cdot \cos 60 - P_2 \cdot \cos 30 = 12 \cdot 0,5 - 18 \cdot 0,866 = -9,6 \text{ kN};$$

$$R_y = -P_1 \cdot \sin 60 - P_2 \cdot \sin 30 = -12 \cdot 0,866 - 18 \cdot 0,5 = -19,4 \text{ kN};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-9,6)^2 + (-19,4)^2} = 11,44 \text{ kN};$$

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R} = -0,84; \quad \alpha_R = 147^\circ;$$

$$M_o = \sum_{i=1}^4 M_{o,i} = -P_{1,x} \cdot 1,5 - P_{1,y} \cdot 1,2 - P_{2,y} \cdot 2,2 + M_1 = -9 - 12,5 - 19,8 + 24 = -17,3 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$d = \frac{|M_o|}{R} = \frac{17,3}{11,44} = 1,51 \text{ m};$$

$$\vec{R}^* = \vec{R}, \quad R^* = 11,44 \text{ kN};$$

Уравнението на директрисата на равнодействащата е $\frac{x}{x_{R^*}} + \frac{y}{y_{R^*}} = 1$, където координатите по осите x и y са: $x_{R^*} = \frac{d}{\sin \alpha_R} = 2,77 \text{ m}$, $y_{R^*} = \frac{d}{\cos \alpha_R} = -1,8 \text{ m}$;

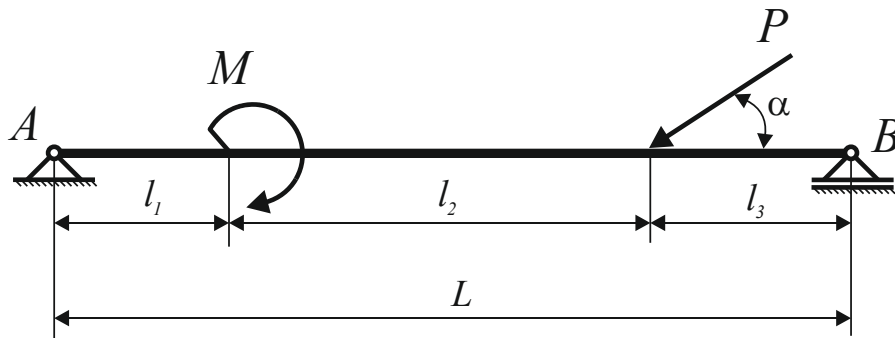
3.5. Равновесие на произволна равнинна система сили

Първи (основен) вариант: $\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0$; $\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0$; $\sum_{i=1}^n M_{o,i} = 0$; - при този избор на условия за равновесия няма ограничения на избора на координатните оси и на точката спрямо, която се определят моментите;

Втори вариант: $\sum_{i=1}^n M_{A,i} = 0$; $\sum_{i=1}^n M_{B,i} = 0$; $\sum_{i=1}^n M_{C,i} = 0$; - необходимо и достатъчно условие за равновесие: алгебричните суми на моментите на всички сили за три точки, нележащи на една права, да бъдат равни на нула;

Трети вариант: $\sum_{i=1}^n M_{A,i} = 0$; $\sum_{i=1}^n M_{B,i} = 0$; $\sum_{i=1}^n X_i = 0$; - необходимо и достатъчно условие за равновесие: алгебричните суми на моментите на всички сили за две точки от равнината и алгебричната сума от проекциите на всички сили върху една ос, която не е перпендикулярна на правата, преминаваща през двете точки, да бъдат равни на нула.

Задача 8. Да се намерят опорните реакции A_x , A_y и $B_y = ? \text{ kN}$ в опорите т. А и т. В на показаната на схемата проста гредка, ако $L = 4 \text{ m}$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $l_3 = 1 \text{ m}$, $P = 12 \text{ kN}$, $M = 24 \text{ kN.m}$, $\alpha = 30^\circ$.



фиг. 3-8

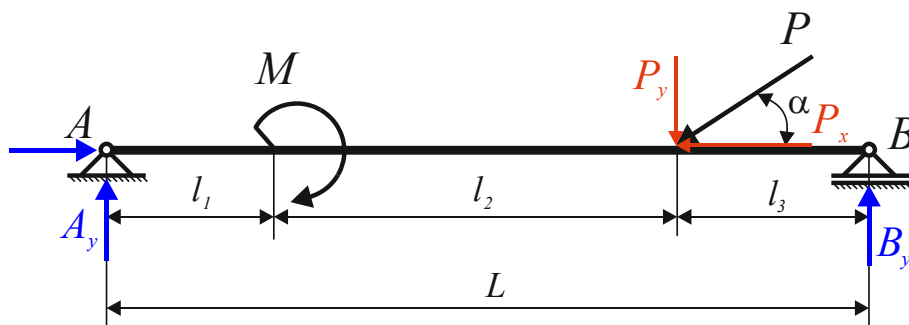
Решение:

Съставят се независимите уравнения на статиката:

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0;$$

$\sum_{i=1}^n M_{O,i} = 0$; - за моментово уравнение за равновесие се избира произволна точка от гредата (за удобство най-добре е да се избере точка, където има опора).



фиг. 3-8a

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0; \rightarrow A_x - P_x = 0 \rightarrow A_x = P_x;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0; \rightarrow A_y - P_y + B_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = P_y;$$

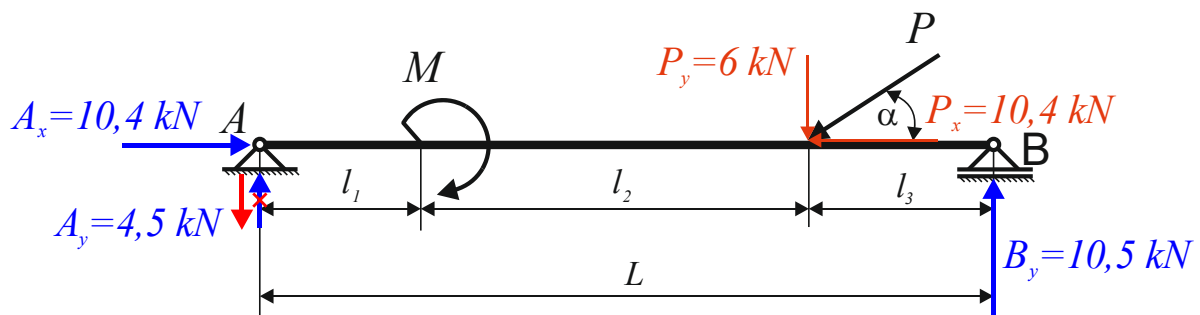
Избираме т. А за моментовото уравнение за равновесие:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0 \rightarrow -M - P_y \cdot (l_1 + l_2) + B_y \cdot L = 0;$$

$$P_x = P \cdot \cos \alpha = 12 \cdot \cos 30 = 10,4 \text{ kN};$$

$$P_y = P \cdot \sin \alpha = 12 \cdot \sin 30 = 6 \text{ kN};$$

$$A_x = 10,4 \text{ kN}; \quad B_y = \frac{M + P_y \cdot (l_1 + l_2)}{L} = \frac{24 + 6 \cdot 3}{4} = 10,5 \text{ kN}; \quad A_y = P_y - B_y = 6 - 10,5 = -4,5 \text{ kN}.$$



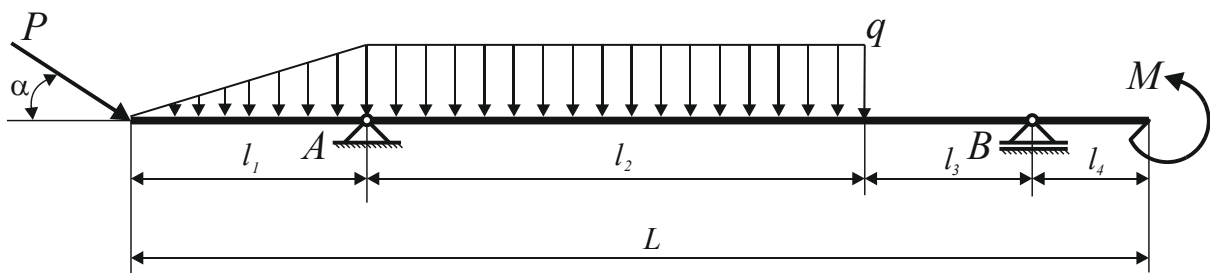
фиг. 3-8б

Проверка:

$$\sum_{i=1}^n M_B = 0 \rightarrow -M + P_y \cdot l_3 - A_y \cdot L = 0 \rightarrow A_y = \frac{P_y \cdot l_3 - M}{L} = \frac{6 \cdot 1 - 24}{4} = -4,5 \text{ kN};$$

Задача 9. За показаната на схемата греда да се определят опорните реакции в опорите.

$$P = 18 \text{ kN}, q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, M = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}, l_1 = 3 \text{ m}, l_2 = 6 \text{ m}, l_3 = 2 \text{ m}, l_4 = 1 \text{ m}, L = 9 \text{ m}.$$



фиг. 3-9

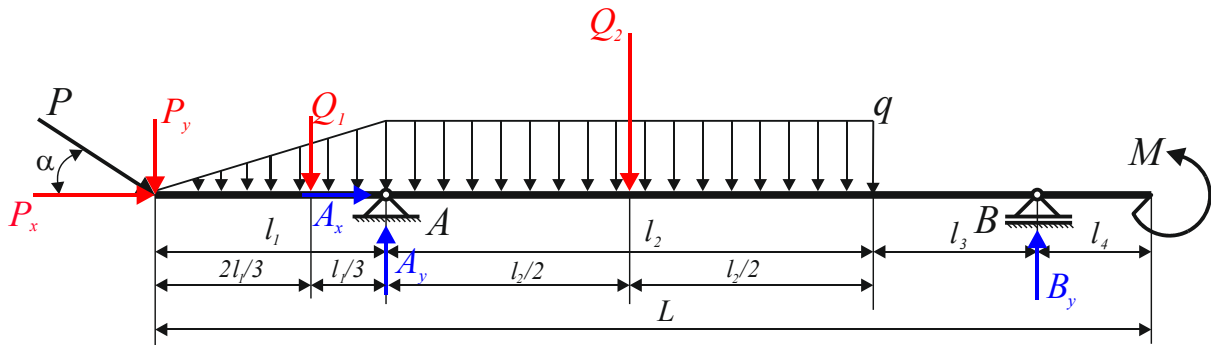
Решение:

Съставят се независимите уравнения на статиката:

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0;$$

$\sum_{i=1}^n M_{O,i} = 0$; - за моментово уравнение за равновесие се избира произволна точка от гредата (за удобство най-добре е да се избере точка, където има опора).



фиг. 3-9а

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0; \rightarrow A_x + P_x = 0 \rightarrow A_x = -P_x;$$

$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0; \rightarrow -P_y - Q_1 + A_y - Q_2 + B_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = P_y + Q_1 + Q_2$, където Q_1 и Q_2 представляват еквивалентни съсредоточени сили на линейно и равномерно разпределените товари, големините на тези съсредоточени сили са равни по стойност на площта на заштрихованите фигури, определени от разпределените товари.

$$Q_1 = \frac{l_1 \cdot q}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ kN}, \quad Q_2 = l_2 \cdot q = 6 \cdot 6 = 36 \text{ kN}.$$

Избираме т. А за моментовото уравнение за равновесие:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0 \rightarrow P_y \cdot l_1 + Q_1 \cdot \frac{l_1}{3} - Q_2 \cdot \frac{l_2}{2} + B_y \cdot (l_2 + l_3) + M = 0;$$

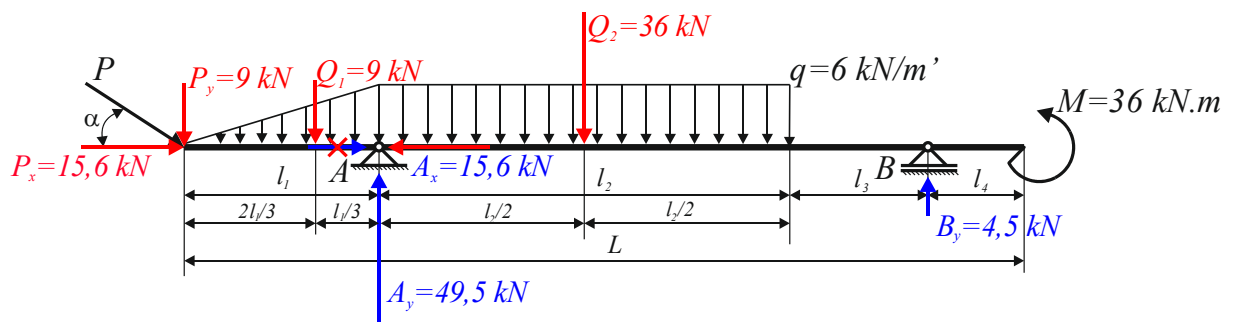
$$P_x = P \cdot \cos \alpha = 18 \cdot \cos 30 = 15,6 \text{ kN};$$

$$P_y = P \cdot \sin \alpha = 18 \cdot \sin 30 = 9 \text{ kN};$$

$$A_x = -15,6 \text{ kN};$$

$$B_y = \frac{-P_y \cdot l_1 - Q_1 \cdot \frac{l_1}{3} + Q_2 \cdot \frac{l_2}{2} - M}{l_2 + l_3} = \frac{-9 \cdot 3 - 9 \cdot 1 + 36 \cdot 3 - 36}{8} = 4,5 \text{ kN};$$

$$A_y = Q_1 + Q_2 + P_y - B_y = 9 + 36 + 9 - 4,5 = 49,5 \text{ kN};$$



фиг. 3-9б

Проверка:

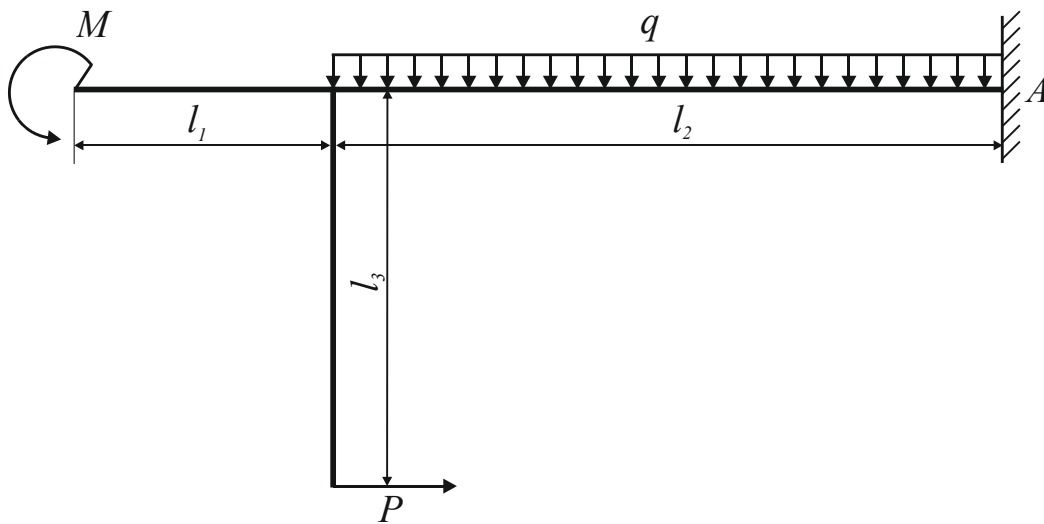
$$\sum_{i=1}^n M_B = 0,$$

$$P_y \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + Q_1 \cdot \left(\frac{l_1}{3} + l_2 + l_3\right) - A_y \cdot (l_2 + l_3) + Q_2 \cdot \left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) + M = 0;$$

$$9.11 + 9.9 - 49.5.8 + 36.5 + 36 = 0!$$

Задача 10. Да се определят големините на опорните реакции за показаната на фигурата рамка, ако:

$$P = 15 \text{ kN}, M = 30 \text{ kN.m}, q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, l_1 = 2 \text{ m}, l_2 = 6 \text{ m}, l_3 = 3 \text{ m}.$$



фиг. 3-10

Решение :

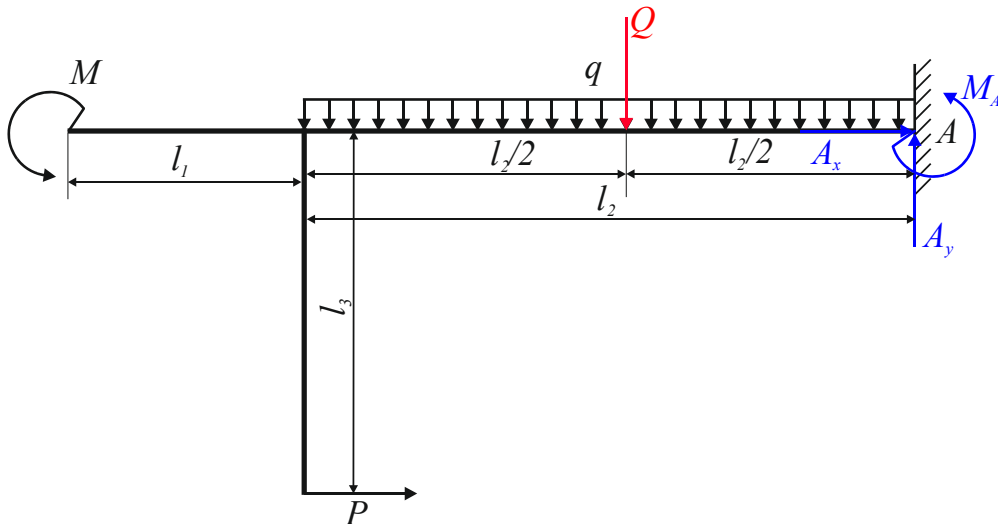
Задачата е статически определима с една запъваща опора в т. А. Опорните реакции, които ще възникнат са: A_x, A_y, M_A . Определяме ги, като се съставят уравненията за равновесие, както следва:

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0; \rightarrow P + A_x = 0 \rightarrow A_x = -P = -15 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0; \rightarrow -Q + A_y = 0; \rightarrow A_y = Q = q \cdot l_2 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_{A,i} = 0; \rightarrow M + P \cdot l_3 + Q \cdot \frac{l_2}{2} + M_A = 0 \rightarrow$$

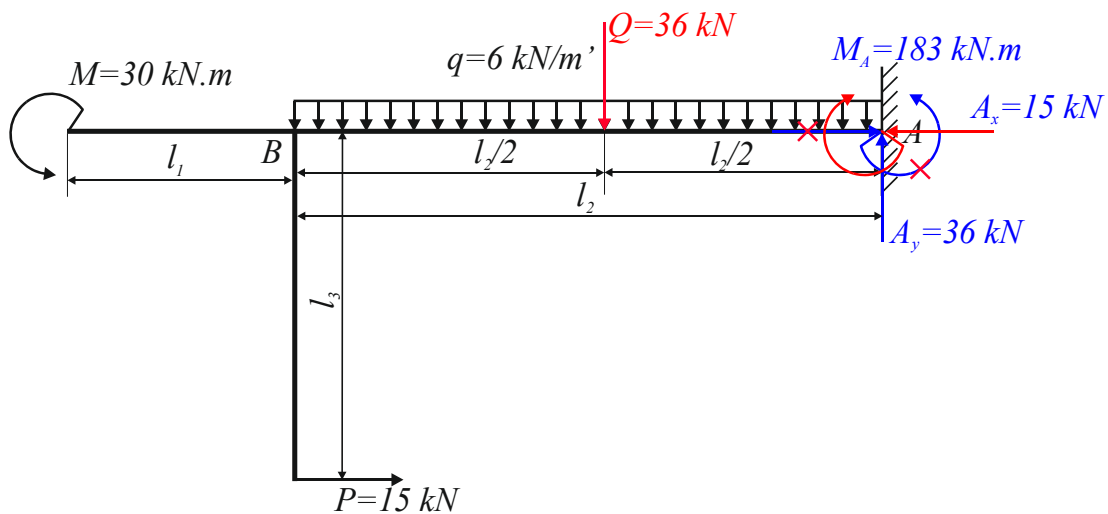
$$M_A = -M - P \cdot l_3 - Q \cdot \frac{l_2}{2} = -30 - 15 \cdot 3 - 36 \cdot 3 = -183 \text{ kN.m};$$



фиг. 3-10а

Проверка: Съставя се моментно уравнение за равновесие за произволна точка от рамката: $\sum_{i=1}^n M_{B,i} = 0 \rightarrow M - M_A - Q \cdot \frac{l_2}{2} + P \cdot l_3 + A_y \cdot l_2 = 0;$

$$\rightarrow 30 - 183 - 36.3 + 15.3 + 36.6 = 0 \rightarrow 0 = 0!$$



фиг. 3-10б

Задача 11. Да се определят големините на опорните реакции за показаната на фигурата рамка, ако:

$$P = 15 \text{ kN}, M = 30 \text{ kN.m}, q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, l_1 = 2 \text{ m}, l_2 = 6 \text{ m}, l_3 = 1,5 \text{ m}.$$

Решение:

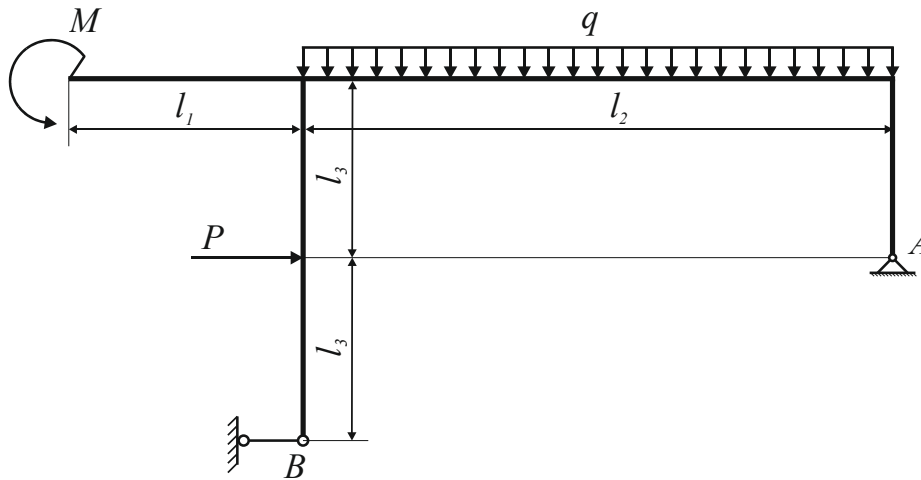
Задачата е статически определена с една неподвижна ставна опора в т. А и една хоризонтална прътова опора в т. В.

Опорните реакции, които ще възникнат са: A_x, A_y, B_x . Определяме ги, като се съставят уравненията за равновесие, както следва:

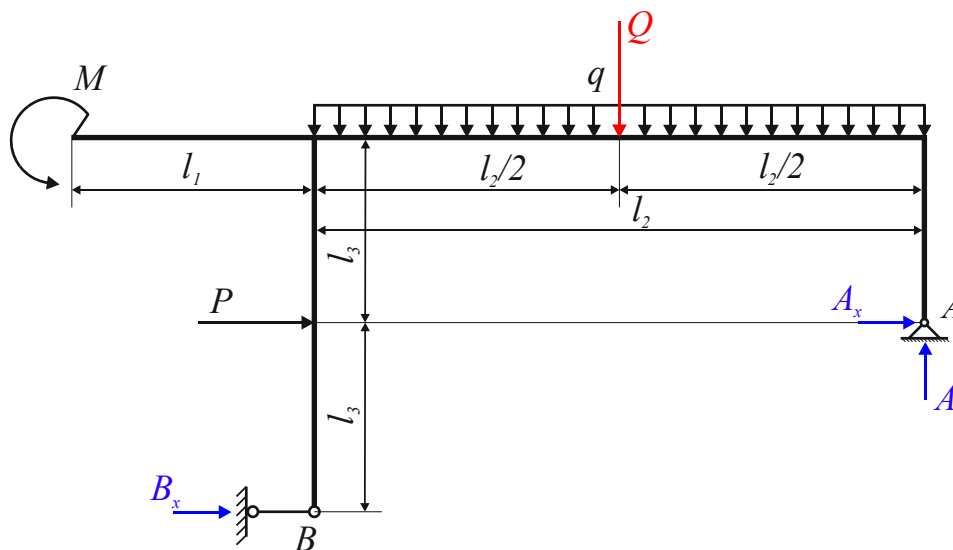
$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0; \rightarrow P + A_x + B_x = 0 \rightarrow A_x = -P - B_x = -15 - (-92) = 77 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0; \rightarrow -Q + A_y = 0; \rightarrow A_y = Q = q \cdot l_2 = 6.6 = 36 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_{A,i} = 0; \rightarrow M + B_x \cdot l_3 + Q \cdot \frac{l_2}{2} = 0 \rightarrow B_x = \frac{-M - \frac{Q \cdot l_2}{2}}{l_3} = \frac{-30 - 36.3}{1.5} = -92 \text{ kN};$$



фиг. 3-11



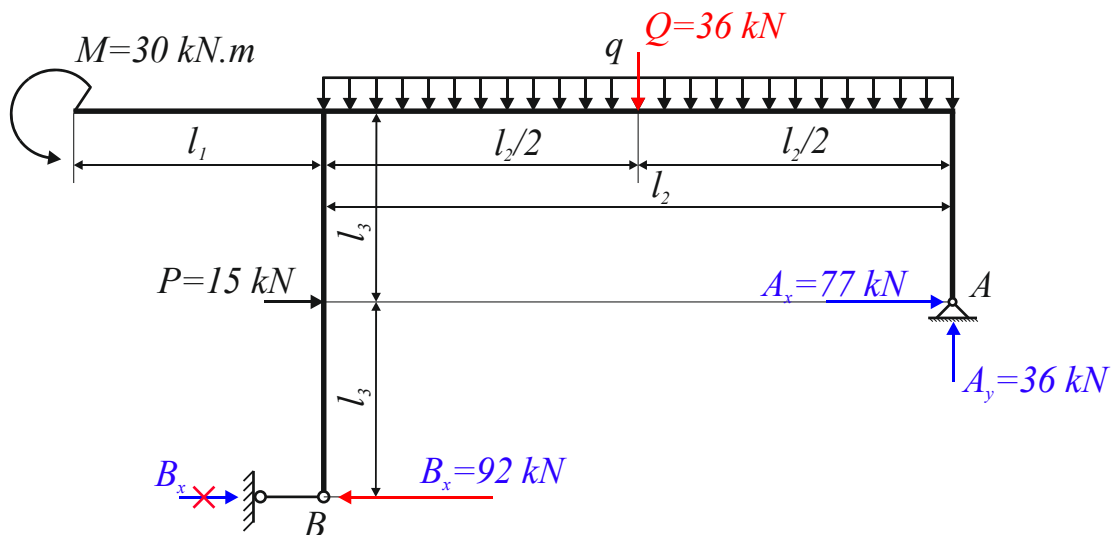
фиг. 3-11а

Проверка:

Съставя се моментово уравнение за равновесие за произволна точка от рамката:

$$\sum_{i=1}^n M_{B,i} = 0 \rightarrow M - A_x \cdot l_3 - Q \cdot \frac{l_2}{2} - P \cdot l_3 + A_y \cdot l_2 = 0;$$

$$\rightarrow 30 - 77.15 - 36.3 - 15.15 + 36.6 = 0 \rightarrow 0 = 0!$$



фиг. 3-116

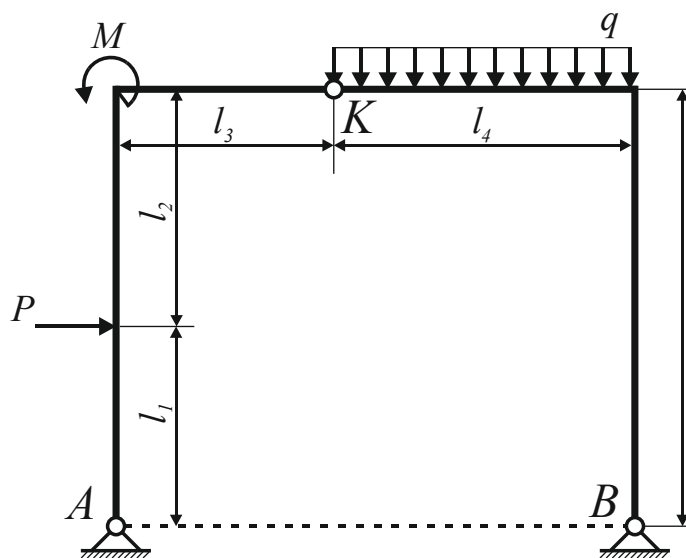
§4. Равновесие на система от тела

4.1. Троставни рамки

Троставните рамки са съставени от две части, свързани помежду си ставно. Общият брой на опорните реакции е 4, наличието на допълнителна става прави троставните рамки статически определени, понеже ставата дава допълнително още една степен на свобода, като по този начин се добавя още едно независимо уравнение на равновесие.

Задача 12. За показаната на *фиг. 3-12* троставна рамка да се определят големините на опорните реакции, ако:

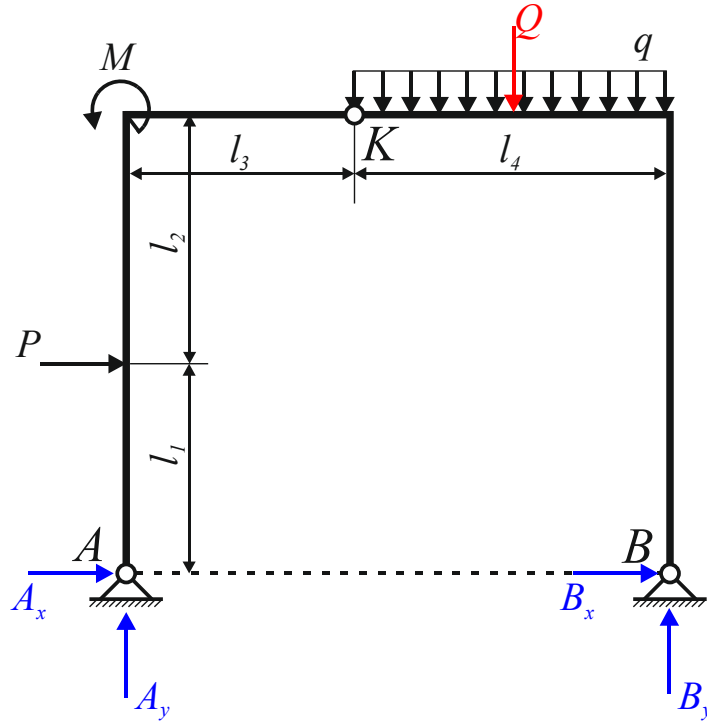
$$P = 12 \text{ kN}, \quad M = 24 \text{ kN.m}, \quad q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad l_1 = 1,5 \text{ m}, \quad l_2 = 2,5 \text{ m}, \quad l_3 = 2 \text{ m}, \quad l_4 = 3 \text{ m}.$$



фиг. 3-12

Решение:

Рамката се разделя на лява и дясна част, като в т. К, на мястото на ставата, се нанасят усилията K_x и K_y , те са перпендикулярни помежду си. Съставят се уравнения за равновесие за цялата триставна рамка, както и моментово уравнение за равновесие за едната от двете половини от рамката за т. К.



фиг. 3-12a

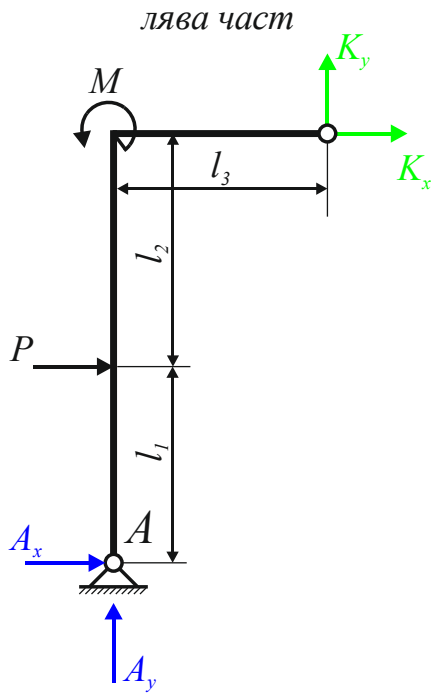
$$Q = q \cdot l_4 = 5.3 = 15 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \rightarrow -P \cdot l_1 + M - Q \cdot (l_3 + l_4/2) + B_y \cdot (l_3 + l_4) = 0;$$

$$B_y = \frac{P \cdot l_1 - M + Q \cdot (l_3 + l_4/2)}{l_3 + l_4} = \frac{12.1.5 - 24 + 15 \cdot (2 + 3/2)}{5} = 9.3 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B = 0; \rightarrow -A_y \cdot (l_3 + l_4) - P \cdot l_1 + M + Q \cdot l_4/2 = 0;$$

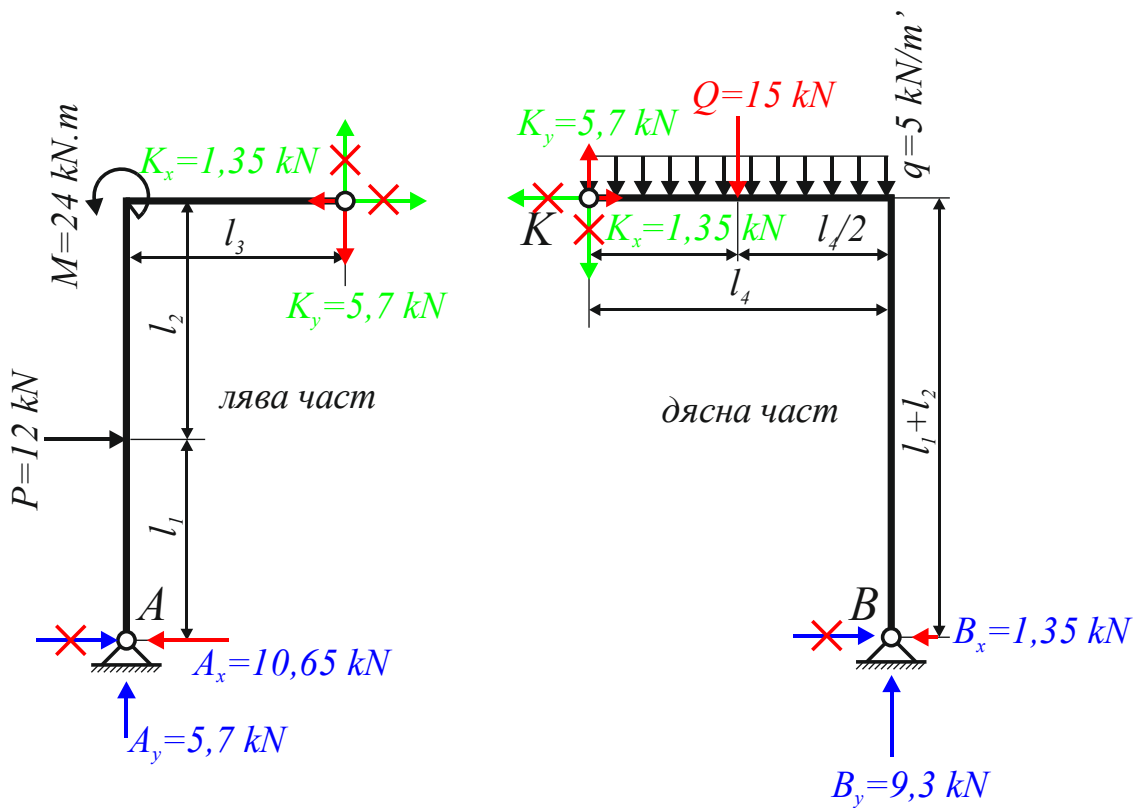
$$A_y = \frac{-P \cdot l_1 + M + Q \cdot l_4/2}{l_3 + l_4} = \frac{-12.1.5 + 24 + 15 \cdot 1.5}{5} = 5.7 \text{ kN};$$



фиг. 3-12б

$$\sum_{i=1}^n M_{K_{л.ч.}} = 0; \rightarrow A_x \cdot (l_1 + l_2) - A_y \cdot l_3 + P \cdot l_2 + M = 0;$$

$$A_x = \frac{A_y \cdot l_3 - P \cdot l_2 - M}{l_1 + l_2} = \frac{5,7 \cdot 2 - 12 \cdot 2,5 - 24}{4} = -10,65 \text{ kN};$$

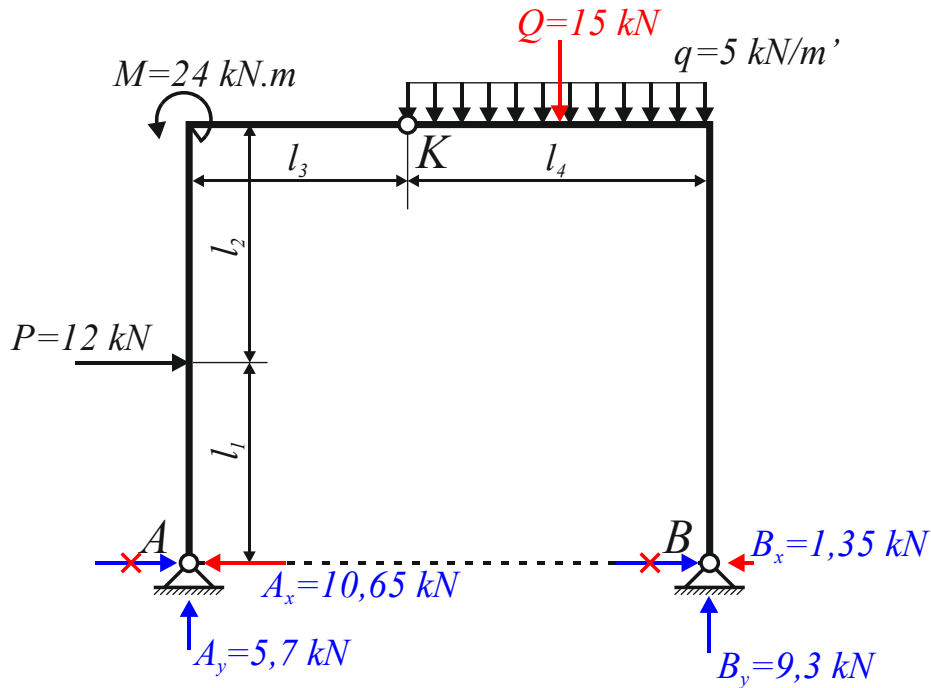


фиг. 3-12в

Усилията в ставата К се определят чрез две силови уравнения за равновесие за лявата част.

$$\sum_{i=1}^n P_x^{л.ч.} = 0; A_x + P + K_x = 0 \rightarrow K_x = -A_x - P = -(-10,65) - 12 = -1,35 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n P_y^{л.ч.} = 0; A_y + K_y = 0 \rightarrow K_y = -A_y = -5,7 \text{ kN};$$

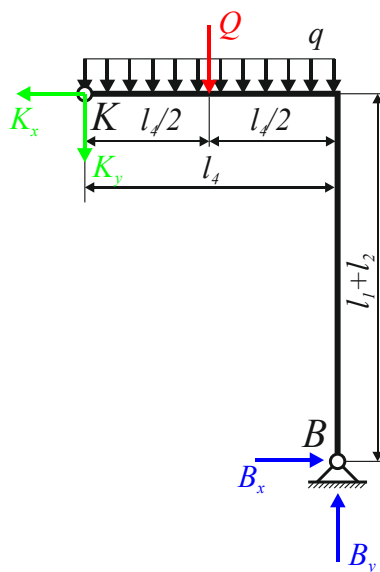


фиг. 3-12г

Усилието B_x се намира от уравнението за равновесие $-\sum_{i=1}^n P_x = 0$ за цялата рамка.

$$A_x + P + B_x = 0 \rightarrow B_x = -A_x - P = -(-10,65) - 12 = -1,35 \text{ kN};$$

дясна част



фиг. 3-12д

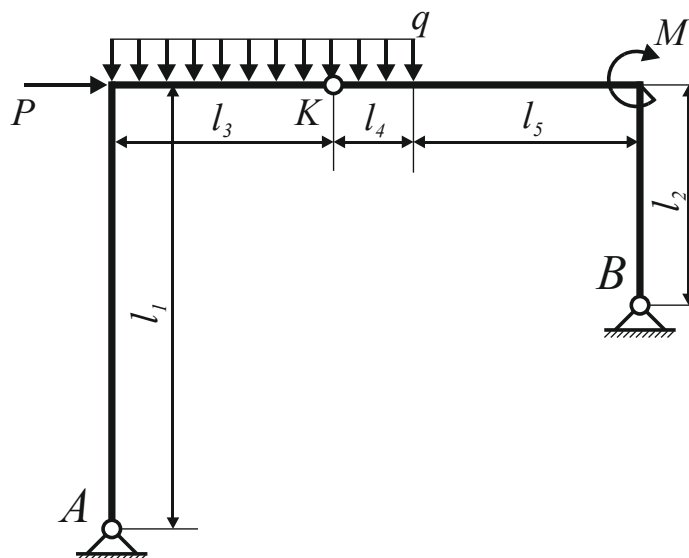
Проверка: Използва се моментово условие за равновесие за другата (дясна) част на рамката за произволна точка.

$$\sum_{i=1}^n M_{K_{д.ч.}} = 0; \rightarrow B_x \cdot (l_1 + l_2) + B_y \cdot l_4 - Q \cdot l_4 / 2 = 0 \rightarrow -1,35,4 + 9,3,3 - 15,1,5 = 0;$$

$$\rightarrow 0 = 0!$$

Задача 13. За показаната на *фиг. 3-13* троставна рамка да се определят големините на опорните реакции, ако:

$$P = 18 \text{ kN}, M = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}, q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, l_1 = 6 \text{ m}, l_2 = 3 \text{ m}, l_3 = 3 \text{ m}, l_4 = 1 \text{ m}, l_5 = 3 \text{ m}.$$



фиг. 3-13

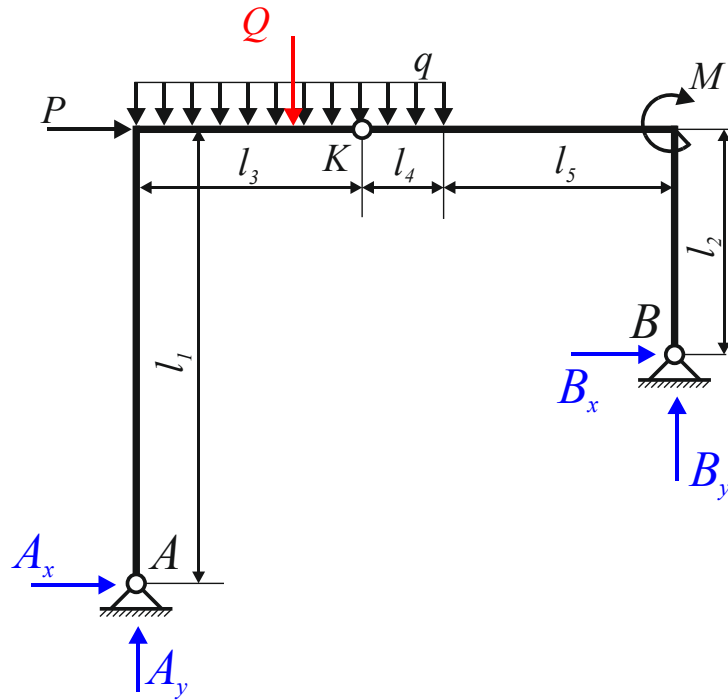
Решение:

Задачата се решава, както предходния пример, но усилията в опорите не могат да се намерят непосредствено от решаването на едно моментово уравнение за равновесие. Необходимо е да се съставят две системи от две уравнения с две неизвестни по следния начин:

$$Q = q \cdot (l_3 + l_4) = 6 \cdot 4 = 24 \text{ kN};$$

$$Q_1 = q \cdot l_3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ kN};$$

$$Q_2 = q \cdot l_4 = 6 \cdot 1 = 6 \text{ kN};$$

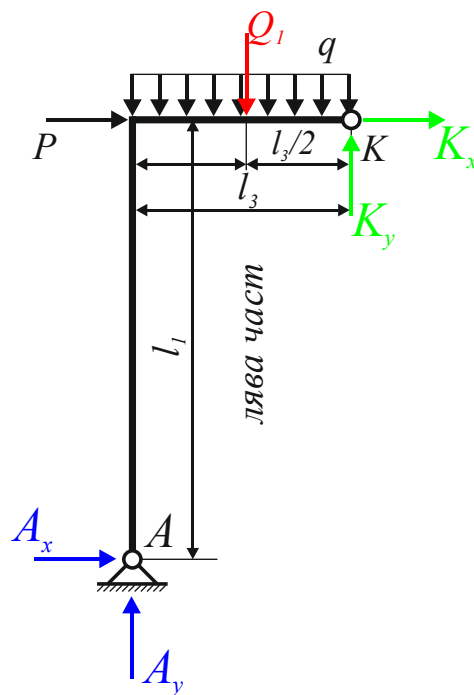


фиг. 3-13а

$$\sum_{i=1}^n M_B = 0 \rightarrow -A_y \cdot (l_3 + l_4 + l_5) + A_x \cdot (l_1 - l_2) - P \cdot l_2 + Q \cdot \left(\frac{l_3 + l_4}{2} + l_5 \right) - M = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_K^{n.q.} = 0 \rightarrow -A_y \cdot l_3 + A_x \cdot l_1 + Q_1 \cdot l_3 / 2 = 0;$$

$$\begin{cases} A_y \cdot 3 - A_x \cdot 6 = 27 \\ -A_y \cdot 7 + A_x \cdot 3 = -36 \end{cases} \rightarrow A_x = -2,4 \text{ kN}, A_y = 4,1 \text{ kN}$$

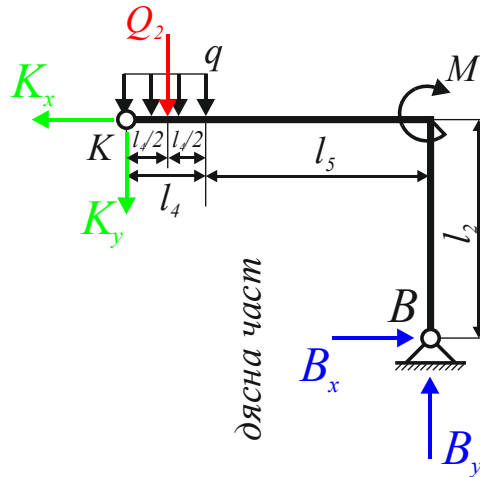


фиг. 3-13б

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot (l_3 + l_4 + l_5) - B_x \cdot (l_1 - l_2) - P \cdot l_1 - Q \cdot \left(\frac{l_3 + l_4}{2}\right) - M = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_K^{A.ч.} = 0 \rightarrow B_y \cdot (l_4 + l_5) + B_x \cdot l_2 - Q_2 \cdot \frac{l_4}{2} - M = 0;$$

$$\begin{cases} B_y \cdot 7 - B_x \cdot 3 = 186 \\ B_y \cdot 4 + B_x \cdot 3 = 33 \end{cases} \rightarrow B_x = -15,5 \text{ kN}, B_y = 19,9 \text{ kN}$$

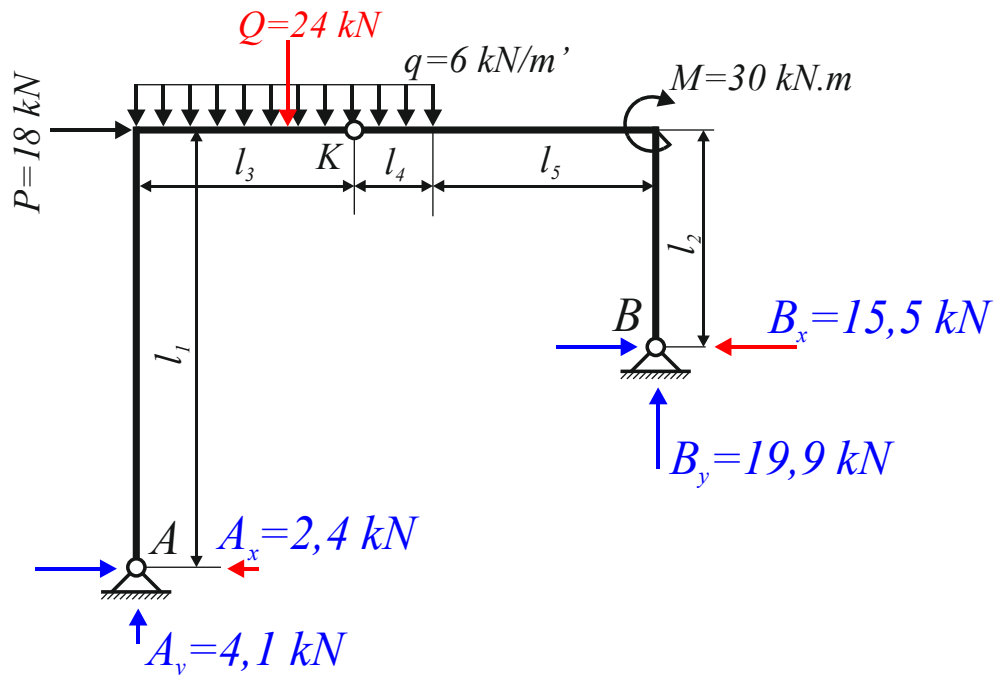


фиг. 3-13в

Проверка:

$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow A_x + P + B_x = 0 \rightarrow -2,4 + 18 - 15,5 = 0,1;$ - разликата от 0,1 се получава от закръгляване при пресмятането!

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow A_y - Q + B_y = 0 \rightarrow 4,1 + 24 - 19,9 = 0;$$



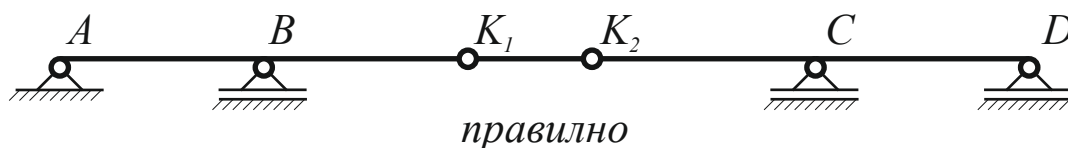
фиг. 3-13г

4.2. Герберови греди

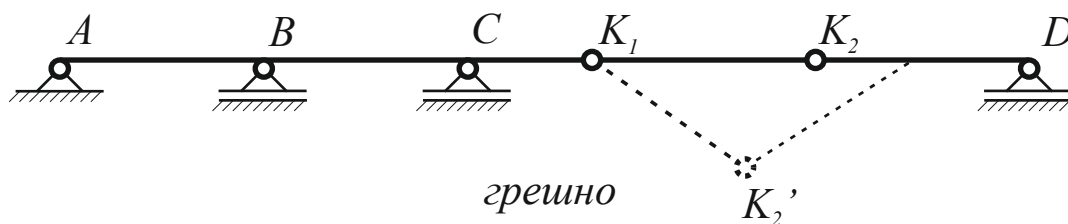
Герберовите греди представляват съвкупност от прави греди, свързани помежду си чрез стави. При герберовите греди една или повече от гредите са основни, а останалите допълнителни. Основните греди са геометрично неизменяеми. От всички опори само една единствена е неподвижна, а всички останали са подвижни ставни опори. Броят на герберовите стави е равен на броя на допълнителните подвижни стави - това е необходимо условие за статическа определеност на герберовата греда, но не достатъчно. За да бъде геометрически неизменяема герберовата греда, герберовите стави трябва да са разположени по следния начин:

1) Между две основни греди не трябва да има повече от две герберови стави (фиг. 4.1а);

2) Между основна и допълнителна греда не трябва да има повече от една става.



фиг. 4.1а



фиг. 4.1б

Определяне на опорните реакции на герберовите греди се извършва чрез използване на независимите уравнения на статиката, като гредата се разделя на отделните и съставни части (основни и допълнителни греди).

Редът за решаване е следния:

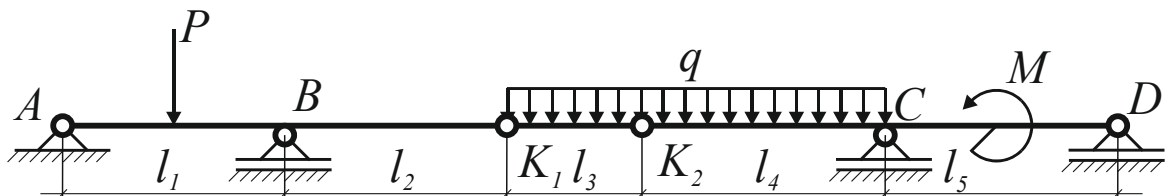
1). Намират се реакциите в допълнителната греда, за която могат да се съставят самостоятелни уравнения за равновесие. За целта на мястото на герберовите стави се въвеждат две взаимно перпендикулярни реакции, които възникват вследствие приложения върху тях външен товар;

2). Процедурата се повтаря, ако има още допълнителни греди;

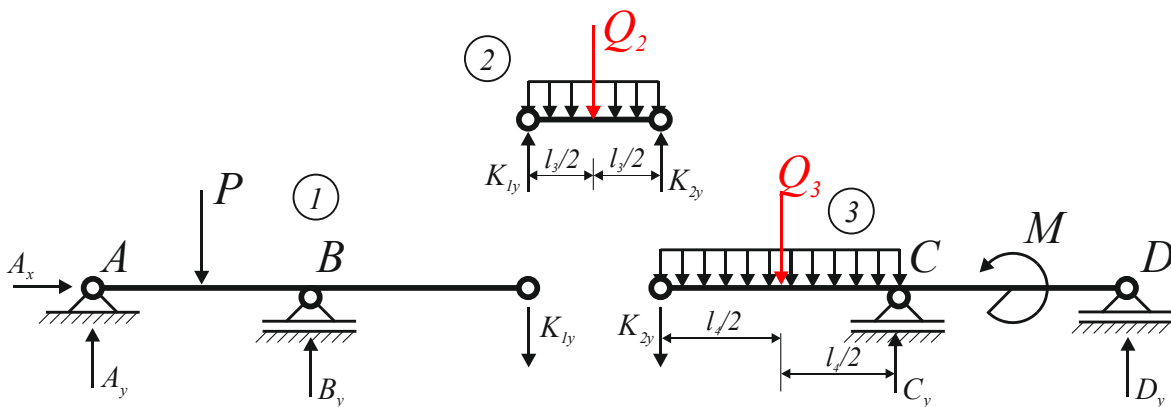
3). Намират се опорните реакции в основната греда.

Задача 14. За показаната на *фиг. 3-14* герберова греда да се определят големините на опорните реакции, ако:

$$P = 15 \text{ kN}, M = 30 \text{ kN.m}, q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, l_1 = 3 \text{ m}, l_2 = 3 \text{ m}, l_3 = 1 \text{ m}, l_4 = 3 \text{ m}, l_5 = 3 \text{ m}.$$



фиг. 3-14



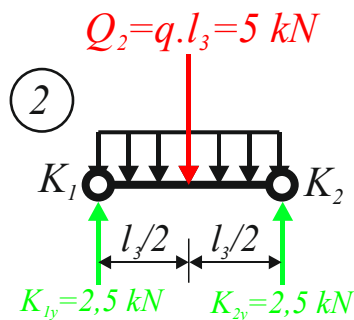
фиг. 3-14a

Решение:

Герберовата греда се разделя на три греди – две основни от гледна точка на вертикалните товари (1 и 3) и една допълнителна (2). Първо се намират усилията в герберовите стави K_1 и K_2 . Допълнителната греда (2) е натоварена с равномерно разпределен товар по цялата си дължина. Следователно усилията в двете герберови стави ще са еднакви поради симетрията на натоварване и подпиране на гредата.

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow K_{1y} - Q_2 + K_{2y} = 0 \rightarrow K_{1y} + K_{2y} = Q_2, \text{ но } K_{1y} = K_{2y} \rightarrow K_{1y} = K_{2y} = \frac{Q_2}{2},$$

$Q_2 = q \cdot l_3 = 5 \cdot 1 = 5 \text{ kN} \rightarrow K_{1y} = K_{2y} = 2,5 \text{ kN}$; - проверка на така намерените усилия в герберовите стави може да се направи чрез решаване на моментови условия за равновесие спрямо коя да е от двете стави!



фиг. 3-14б

Проверка: $\sum_{i=1}^n M_{K_1} = 0 \rightarrow -Q_2 \cdot \frac{l_3}{2} + K_{2y} \cdot l_3 \rightarrow K_{2y} = \frac{Q_2 \cdot \frac{l_3}{2}}{l_3} = \frac{Q_2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ kN!}$ –
 същата проверка може да се направи и за другата герберова става K_2 !

От решението на допълнителната греда (2) се вижда, че усилията $K_{1x} = K_{2x} = 0 \text{ kN}$, защото няма външно натоварване в хоризонтално направление! След като са намерени усилията в герберовите стави в допълнителната греда (2), се намерат опорните реакции в основните греди (1 и 3), като усилията в ставите се пренасят с обратна посока.

Намиране на усилията в греда (1):

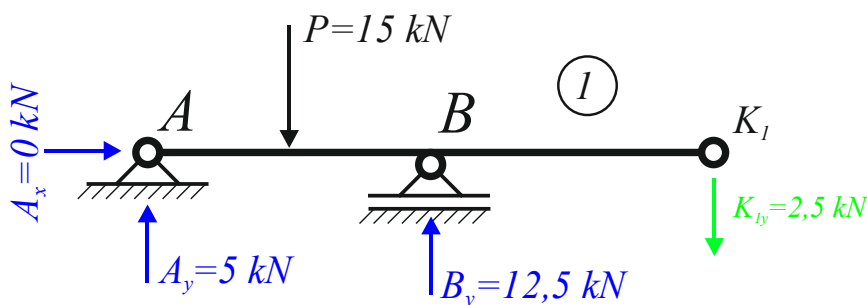
$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow A_x = 0 \text{ kN.}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \rightarrow -P \cdot \frac{l_1}{2} + B_y \cdot l_1 - K_{1y} \cdot (l_1 + l_2) = 0$$

$$\rightarrow B_y = \frac{P \cdot \frac{l_1}{2} + K_{1y} \cdot (l_1 + l_2)}{l_1} = \frac{15 \cdot 1,5 + 2,5 \cdot 3}{3} = 12,5 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B = 0; \rightarrow -A_y \cdot l_1 + P \cdot \frac{l_1}{2} - K_{1y} \cdot l_2 = 0$$

$$\rightarrow A_y = \frac{P \cdot \frac{l_1}{2} - K_{1y} \cdot l_2}{l_1} = \frac{15 \cdot 1,5 - 2,5 \cdot 3}{3} = 5 \text{ kN};$$



фиг. 3-14в

Намиране на усилията в греда (3):

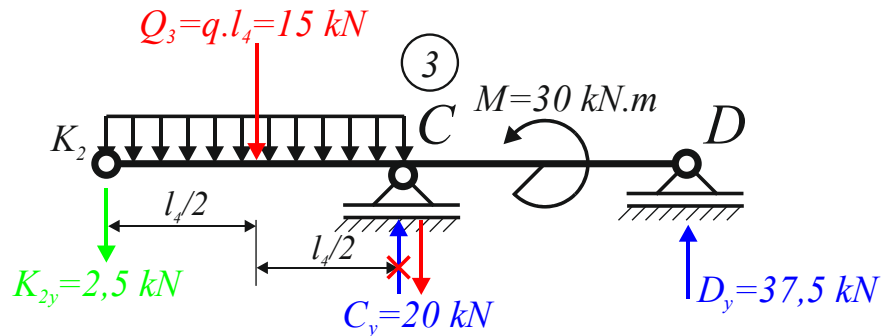
$$Q_3 = q \cdot l_4 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_C = 0; \rightarrow K_{2y} \cdot l_4 + Q_3 \cdot \frac{l_4}{2} + M + D_y \cdot l_5 = 0$$

$$\rightarrow D_y = \frac{-K_{1y} \cdot l_4 - Q_3 \cdot \frac{l_4}{2} - M}{l_5} = \frac{-2,5 \cdot 3 - 15,1,5 - 30}{3} = -20 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_D = 0; \rightarrow K_{2y} \cdot (l_4 + l_5) + Q_3 \cdot \left(\frac{l_4}{2} + l_5\right) - C_y \cdot l_5 + M = 0$$

$$\rightarrow C_y = \frac{K_{2y} \cdot (l_4 + l_5) + Q_3 \cdot \left(\frac{l_4}{2} + l_5\right) + M}{l_5} = \frac{2,5 \cdot 6 + 15 \cdot 4,5 + 30}{3} = 37,5 \text{ kN};$$

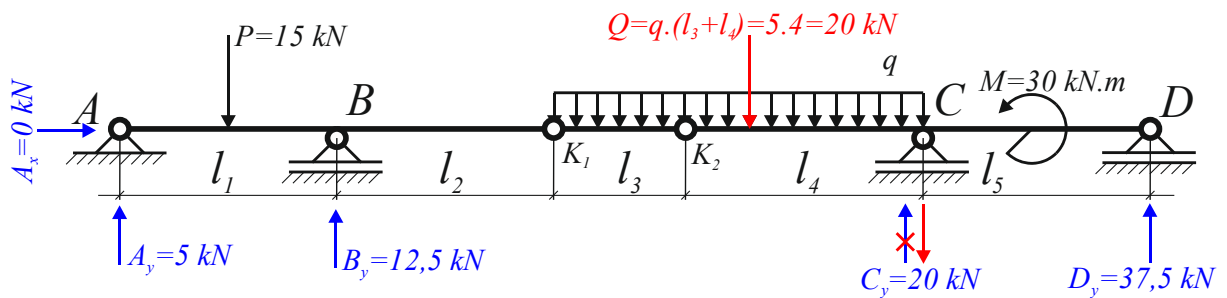


фиг. 3-14z

Проверка за цялата гърберова греда:

$$Q = q \cdot (l_3 + l_4) = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kN};$$

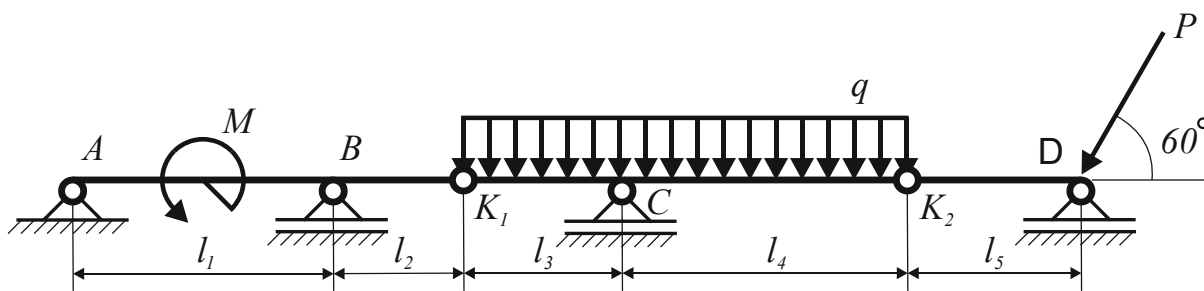
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0 \rightarrow A_y - P + B_y - Q + C_y + D_y = 0 \rightarrow 5 - 15 + 12,5 - 20 + 37,5 + (-20) = 0 \rightarrow 0 = 0!$$



фиг. 3-14d

Задача 15. За показаната на фиг. 3-15 гърберова греда да се определят големините на опорните реакции, ако:

$$P = 20 \text{ kN}, M = 18 \text{ kN.m}, q = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, l_1 = 3 \text{ m}, l_2 = 1 \text{ m}, l_3 = 1,5 \text{ m}, l_4 = 3 \text{ m}, l_5 = 2 \text{ m}.$$



фиг. 3-15

Решение:

Герберовата греда е съставена от три греди: греда (1) – основна греда, греди (2 и 3) – допълнителни греди. Решението на задачата е в следната последователност: определят се опорните реакции в греда (3); намират се опорните реакции в греда (2); намират се опорните реакции в основната греда (1).

Опорни реакции в греда (3):

Силата P се разлага на проекциите ѝ по осите x и y , съответно: $P_x = P \cdot \cos 60 = 10 \text{ kN}$, и $P_y = P \cdot \sin 60 = 17,3 \text{ kN}$.

$$\sum_{i=1}^n M_{K_2}^{\text{гр.3}} = 0; \rightarrow D_y \cdot l_5 - P_y \cdot l_5 = 0 \rightarrow D_y = P_y = 17,3 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_D^{\text{гр.3}} = 0; \rightarrow K_{2y} \cdot l_5 = 0 \rightarrow K_{2y} = 0 \text{ kN}.$$

Опорни реакции в греда (2):

Разпределеният товар q се заменя с еквивалентния му съсредоточен товар $Q = q \cdot (l_3 + l_4) = 27 \text{ kN}$.

$$\sum_{i=1}^n M_{K_1}^{\text{гр.2}} = 0; \rightarrow Q \cdot \left(\frac{l_3+l_4}{2}\right) - C_y \cdot l_3 = 0 \rightarrow C_y = \frac{Q \cdot \left(\frac{l_3+l_4}{2}\right)}{l_3} = 40,5 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_C^{\text{гр.2}} = 0; \rightarrow Q \cdot \left(l_4 - \frac{l_3+l_4}{2}\right) - K_{1y} \cdot l_3 = 0 \rightarrow K_{1y} = \frac{Q \cdot \left(l_4 - \frac{l_3+l_4}{2}\right)}{l_3} = -13,5 \text{ kN}.$$

Опорни реакции в греда (1):

$$\sum_{i=1}^n M_A^{\text{гр.1}} = 0; \rightarrow M + B_y \cdot l_1 + K_{1y} \cdot (l_1 + l_2) = 0 \rightarrow B_y = \frac{-M - K_{1y} \cdot (l_1 + l_2)}{l_1} = -24 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B^{\text{гр.1}} = 0; \rightarrow M - A_y \cdot l_1 + K_{1y} \cdot l_2 = 0 \rightarrow A_y = \frac{M + K_{1y} \cdot l_2}{l_1} = 10,5 \text{ kN}.$$

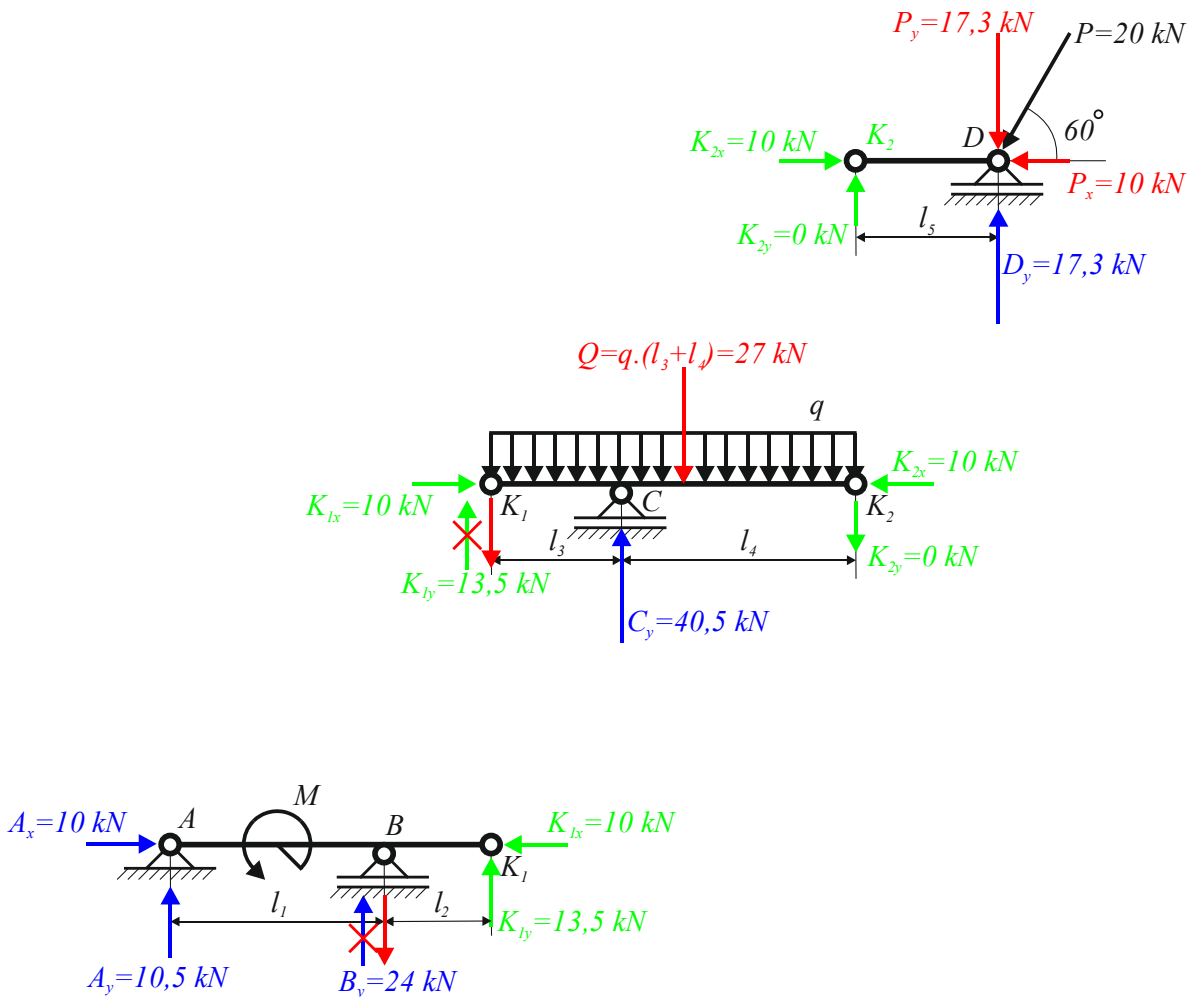
Проверка за цялата греда:

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow A_y + B_y + C_y - Q + D_y - P_x = 0 \rightarrow 10,5 - 24 + 40,5 - 27 + 17,3 - 10 = 0! \rightarrow 0 = 0$$

Може да се направи и проверка за цялата греда с едно моментно условие за равновесие спрямо произволна точка.

$$\sum_{i=1}^n M_D = 0; \rightarrow -A_y \cdot L + M + B_y \cdot (L - l_1) - C_y \cdot (l_4 + l_5) + Q \cdot (l_5 + \left(\frac{l_3 + l_4}{2}\right)) = 0;$$

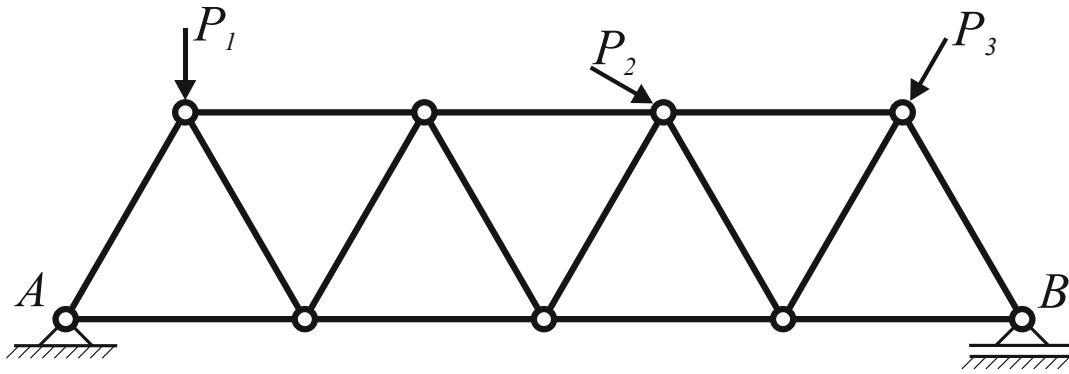
$$-10,5 \cdot 10,5 + 18 + 24,7,5 - 40,5,5 + 27,4,25 = 0! \rightarrow 0 = 0$$



фиг. 3-15а

4.3. Фермови конструкции

Фермовата конструкция представлява геометрически неизменяема конструкция, съставена от пръти, които са ставно свързани в краищата си. Местата на връзка между отделните пръти се наричат възли. За фермовите конструкции е прието, че всички външни товари действат само във възлите, като усилията, които възникват в тях се поемат от прътите. Усилията в прътите са по направление на оста им, така, че те работят само на натиск или на опън.



фиг. 4.2

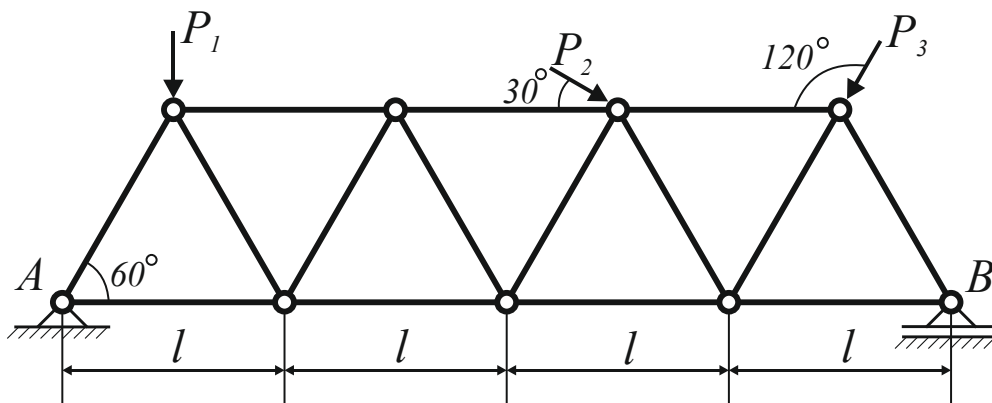
При равнинните прътови конструкции, броя на прътите k и броя на възлите n имат следното съотношение: $k = 2n - 3$.

Ако $k < 2n - 3$, фермата ще бъде геометрически изменяема, а ако $k > 2n - 3$, фермата ще бъде статически неопределена.

Задачата за изчисляване на фермова конструкция се свежда до намиране на опорните реакции и усилията в прътите. Опорните реакции се определят от уравненията на статиката за равновесие на равнинна система сили, докато усилията в прътите се намират чрез метода на изрязване на възлите или по метода на Ритер.

Методът чрез изрязване на възлите е целесъобразен, когато е необходимо да се изчислят усилията във всички пръти, а методът на Ритер се използва, когато се търси усилието в конкретен прът от фермовата конструкция.

Задача 16. За показаната на *фиг. 3-16* фермова конструкция да се определят прътовите усилия и опорните реакции, ако $P_1 = 12 \text{ kN}$, $P_2 = 18 \text{ kN}$, $P_3 = 24 \text{ kN}$, $l = 3 \text{ m}$. Фермата е изградена от равностранни триъгълници.



фиг. 3-16

Решение:

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30 = 15,6 \text{ kN}; P_{2y} = P_2 \cdot \sin 30 = 9 \text{ kN};$$

$$P_{3x} = P_3 \cdot \cos 60 = 12 \text{ kN}; P_{3y} = P_3 \cdot \sin 60 = 20,8 \text{ kN};$$

Определяне на опорните реакции:

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \rightarrow B_y \cdot 4l - P_1 \cdot \frac{l}{2} - P_{2y} \cdot \frac{5l}{2} - P_{2x} \cdot l \cdot \sin 60 - P_{3y} \cdot \frac{7l}{2} + P_{3x} \cdot l \cdot \sin 60 = 0;$$

$$B_y = \frac{P_1 \cdot \frac{l}{2} + P_{2y} \cdot \frac{5l}{2} + P_{2x} \cdot l \cdot \sin 60 + P_{3y} \cdot \frac{7l}{2} - P_{3x} \cdot l \cdot \sin 60}{4l}; B_y = \frac{12 \cdot 1,5 + 9 \cdot 7,5 + 15,6 \cdot 2,6 + 20,8 \cdot 10,5 - 12 \cdot 2,6}{12} = 26,1 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B = 0; \rightarrow -A_y \cdot 4l + P_1 \cdot \frac{7l}{2} + P_{2y} \cdot \frac{3l}{2} - P_{2x} \cdot l \cdot \sin 60 + P_{3y} \cdot \frac{l}{2} + P_{3x} \cdot l \cdot \sin 60 = 0;$$

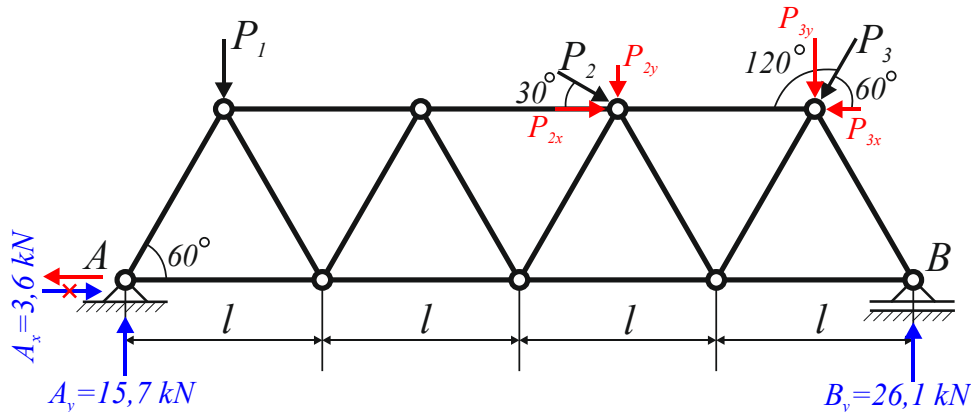
$$A_y = \frac{P_1 \cdot \frac{7l}{2} + P_{2y} \cdot \frac{3l}{2} - P_{2x} \cdot l \cdot \sin 60 + P_{3y} \cdot \frac{l}{2} + P_{3x} \cdot l \cdot \sin 60}{4l}; A_y = \frac{12 \cdot 10,5 + 9 \cdot 4,5 - 15,6 \cdot 2,6 + 20,8 \cdot 1,5 + 12 \cdot 2,6}{12} = 15,7 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow A_x + P_{2x} - P_{3x} = 0 \rightarrow A_x = P_{3x} - P_{2x} = 12 - 15,6 = -3,6 \text{ kN}.$$

Проверка:

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow A_y - P - P_{2y} - P_{3y} + B_y = 0 \rightarrow 15,7 - 12 - 9 - 20,8 + 26,1 = 0.$$

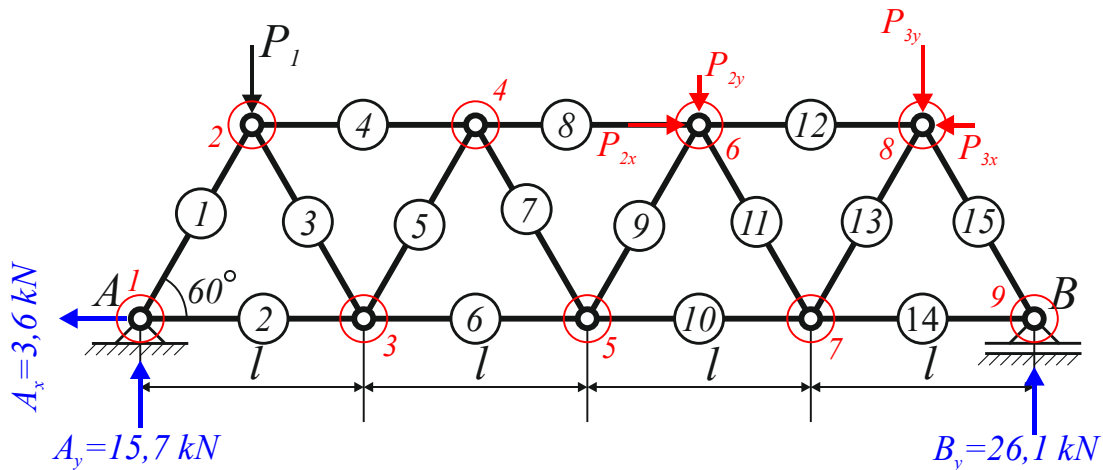
$$0 = 0!$$



фиг. 3-16а

Определяне на усилията в прътите:

За по-голямо удобство е препоръчително предварително номериране на прътите и възлите!



фиг. 3-166

Метод чрез изрязване на възлите: Изчисляването на усилията в прътите започва, като се изреже възел с два пръта - в случая възел 1, свързан с пръти 1 и 2. Съставят се две силови уравнения за равновесие, съответно за оси x и y.

Възел 1:

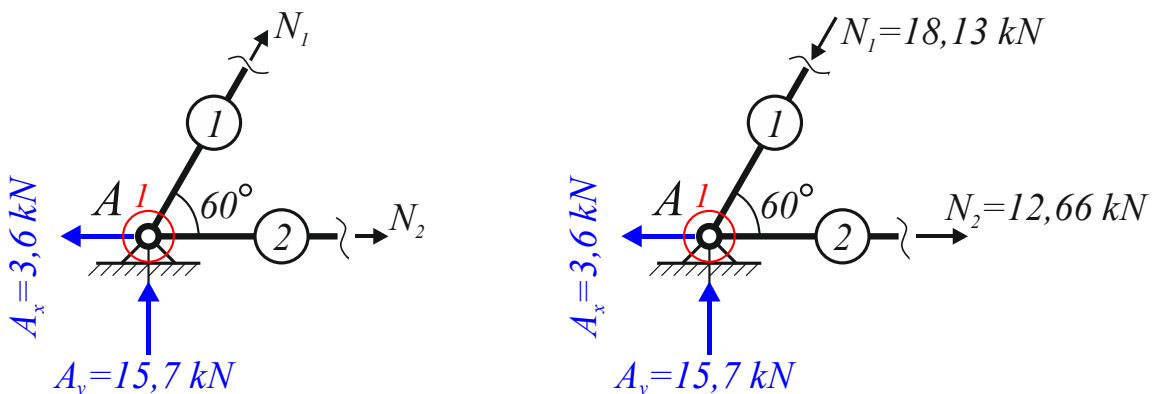
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow A_y + N_{1y} = 0 \rightarrow N_{1y} = -A_y = -15,7 \text{ kN}$$

$$N_1 = \frac{N_{1y}}{\sin 60} = -18,13 \text{ kN} - \text{натиск!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow -A_x - N_{1x} + N_2 = 0 \rightarrow N_2 = A_x + N_{1x},$$

където $N_{1x} = N_1 \cdot \cos 60 = 9,06 \text{ kN}$

$$N_2 = 3,6 + 9,06 = 12,66 \text{ kN} - \text{опън!}$$



фиг. 3-166

Възел 2:

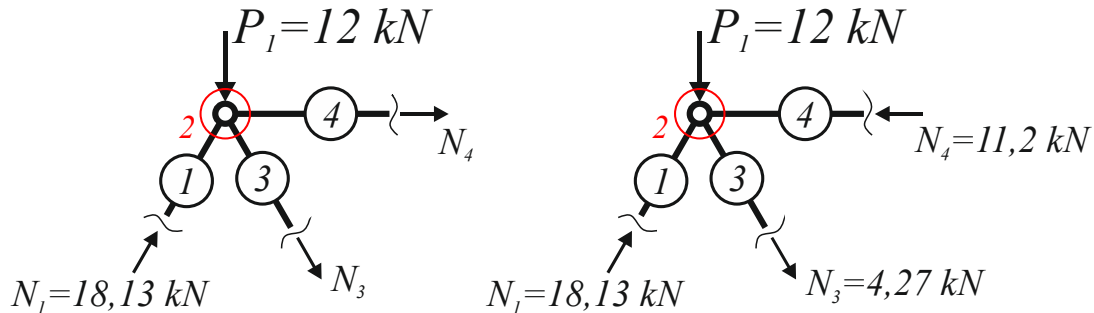
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow -P_1 + N_{1y} - N_{3y} = 0 \rightarrow N_{3y} = -P_1 + N_{1y} = -12 + 15,7 = 3,7 \text{ kN}$$

$$N_3 = \frac{N_{3y}}{\sin 60} = 4,27 \text{ kN} - \text{опън!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow N_{1x} + N_{3x} + N_4 = 0 \rightarrow N_4 = -N_{1x} - N_{3x},$$

където $N_{1x} = N_1 \cdot \cos 60 = 9,06 \text{ kN}$ и $N_{3x} = N_3 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$

$N_4 = -9,06 - 2,14 = -11,2 \text{ kN}$ – натиск!



фиг. 3-16г

Възел 3:

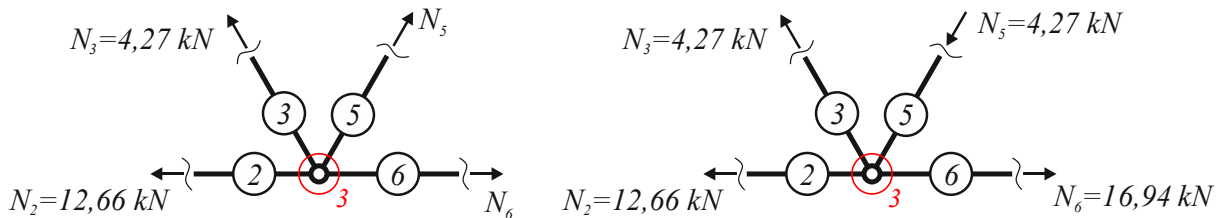
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow N_{3y} + N_{5y} = 0 \rightarrow N_{5y} = -N_{3y} = -3,7 \text{ kN}$$

$N_5 = \frac{N_{5y}}{\sin 60} = -4,27 \text{ kN}$ – натиск!

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow -N_2 - N_{3x} - N_{5x} + N_6 = 0 \rightarrow N_6 = N_2 + N_{3x} + N_{5x},$$

където $N_{3x} = N_3 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$ и $N_{5x} = N_5 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$

$N_6 = 12,66 + 2,14 + 2,14 = 16,94 \text{ kN}$ – опън!



фиг. 3-16д

Възел 4:

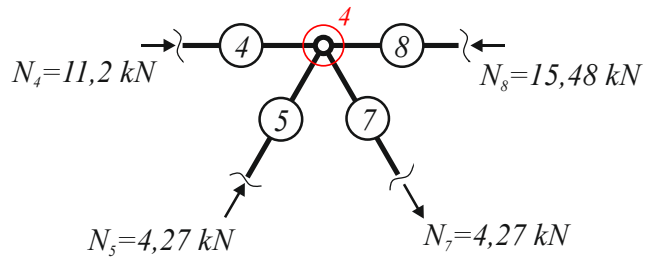
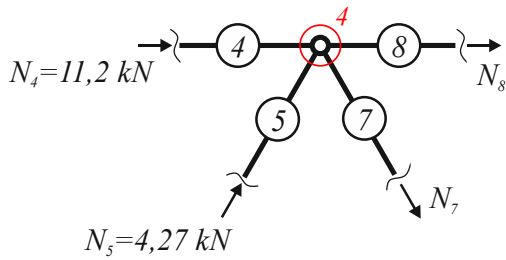
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow N_{5y} - N_{7y} = 0 \rightarrow N_{7y} = N_{5y} = 3,7 \text{ kN}$$

$N_7 = \frac{N_{7y}}{\sin 60} = 4,27 \text{ kN}$ – опън!

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow N_4 + N_{5x} + N_{7x} + N_8 = 0 \rightarrow N_8 = -N_4 - N_{5x} - N_{7x},$$

където $N_{5x} = N_5 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$ и $N_{7x} = N_7 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$

$N_8 = -11,2 - 2,14 - 2,14 = -15,48 \text{ kN}$ – натиск!



фиг. 3-16е

Възел 5:

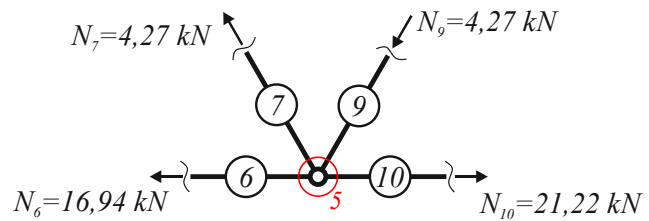
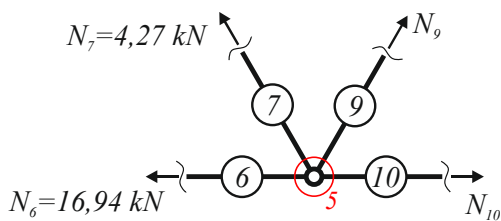
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow N_{7y} + N_{9y} = 0 \rightarrow N_{9y} = -N_{7y} = -3,7 \text{ kN}$$

$$N_9 = \frac{N_{9y}}{\sin 60} = -4,27 \text{ kN} - \text{натиск!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow -N_6 - N_{7x} - N_{9x} + N_{10} = 0 \rightarrow N_{10} = N_6 + N_{7x} + N_{9x},$$

където $N_{5x} = N_5 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$ и $N_{7x} = N_7 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$

$$N_6 = 16,94 + 2,14 + 2,14 = 21,22 \text{ kN} - \text{опън!}$$



фиг. 3-16ж

Възел 6:

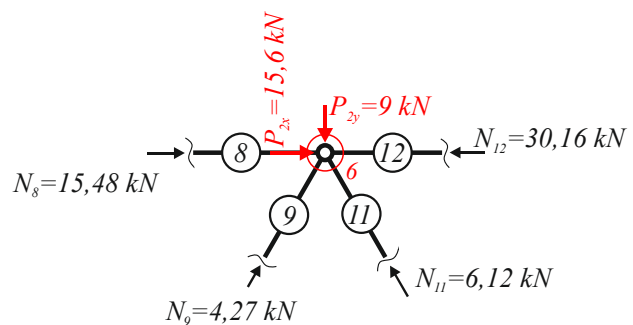
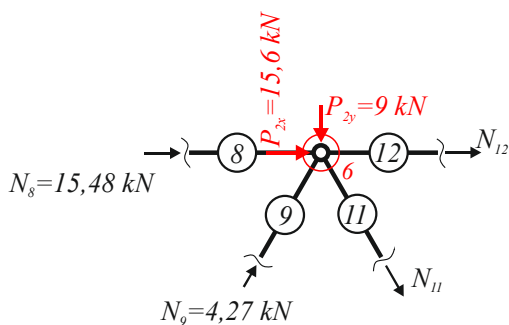
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow N_{9y} - P_{2y} - N_{11y} = 0 \rightarrow N_{11y} = N_{9y} - P_{2y} = 3,7 - 9 = -5,3 \text{ kN}$$

$$N_{11} = \frac{N_{11y}}{\sin 60} = -6,12 \text{ kN} - \text{натиск!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow N_8 + P_{2x} + N_{9x} - N_{11x} + N_{12} = 0 \rightarrow N_{12} = N_{11x} - P_{2x} - N_8 - N_{9x},$$

където $N_{9x} = N_9 \cdot \cos 60 = 2,14 \text{ kN}$ и $N_{11x} = N_{11} \cdot \cos 60 = 3,06 \text{ kN}$

$$N_{12} = 3,06 - 15,6 - 15,48 - 2,14 = -30,16 \text{ kN} - \text{натиск!}$$



фиг. 3-16з

Възел 7:

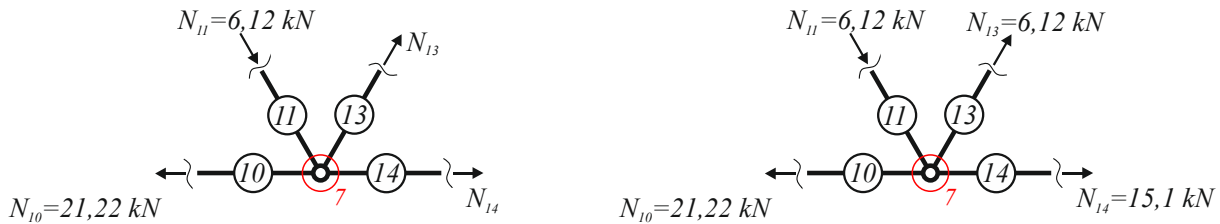
$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow -N_{11y} + N_{13y} = 0 \rightarrow N_{13y} = N_{11y} = 5,3 \text{ kN}$$

$$N_{13} = \frac{N_{13y}}{\sin 60} = 6,12 \text{ kN} - \text{опън!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow -N_{10} + N_{11x} + N_{13x} + N_{14} = 0 \rightarrow N_{14} = N_{10} - N_{11x} - N_{13x},$$

където $N_{11x} = N_{11} \cdot \cos 60 = 3,06 \text{ kN}$ и $N_{13x} = N_{13} \cdot \cos 60 = 3,06 \text{ kN}$

$$N_{12} = 21,22 - 3,06 - 3,06 = 15,1 \text{ kN} - \text{опън!}$$



фиг. 3-16и

Възел 8:

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow -N_{13y} - P_{3y} - N_{15y} = 0 \rightarrow N_{15y} = -N_{13y} - P_{3y} = -26,1 \text{ kN}$$

$$N_{15} = \frac{N_{15y}}{\sin 60} = -30,14 \text{ kN} - \text{натиск!}$$

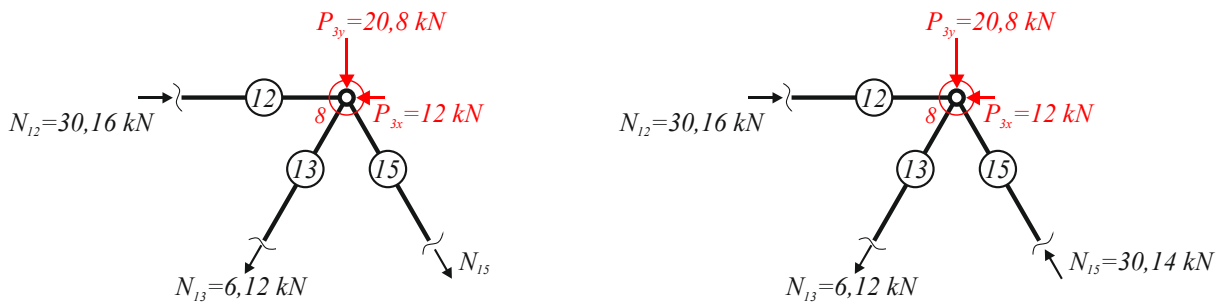
Проверка:

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow N_{12} - P_{3x} - N_{13x} + N_{15x} = 0 \rightarrow N_{15x} = -N_{12} + P_{3x} + N_{13x},$$

където $N_{13x} = N_{11} \cdot \cos 60 = 3,06 \text{ kN}$

$$N_{15x} = -30,16 + 12 + 3,06 = -15,1 \text{ kN} \rightarrow N_{15} = \frac{N_{15x}}{\cos 60} = -30,2 \text{ kN} - \text{натиск!}$$

Разликата между двата резултата е следствие от закръгленията при пресмятането!



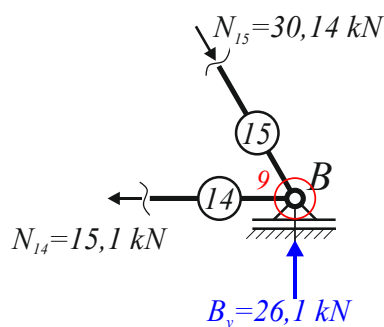
фиг. 3-16й

Възел 9:

Проверка:

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow B_y - N_{15y} = 0 \rightarrow 26,1 - 26,1 = 0 \text{ kN} - \text{проверката излиза!}$$

$$\sum_{i=1}^n P_x = 0; \rightarrow -N_{14} + N_{15x} = 0 \rightarrow -15,1 + 15,1 = 0 \text{ kN} - \text{проверката излиза!}$$



фиг. 3-16к

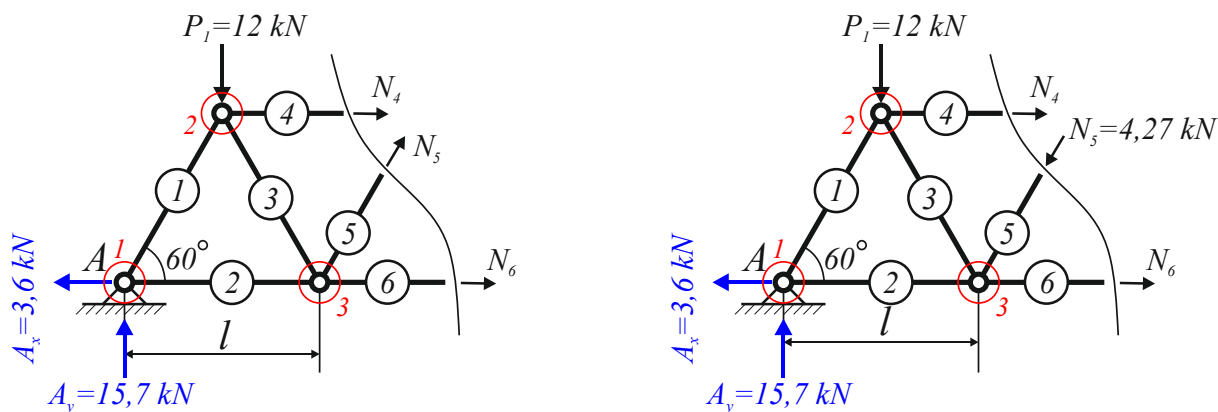
Метод на Ритер: Фермовата конструкция се разделя на две части в зависимост от това, в кои пръти се търсят усилията. Мислено фермата се разрязва през прътите, така че пръта, за която се търси усилието, да е един от прерязаните. Съставя се моментно уравнение за равновесие за едната половина на фермата, така, че единственото неизвестно е търсеното усилие.

Задача 17. Да се намерят усилията в пръти 5 и 10 чрез метода на Ритер, за фермата, показана на фиг. 3-16.

Разглежда се лявата част на фермата, като е направен разрез през пръти 4, 5 и 6. Тъй като усилията в прътите 4 и 6 са насочени по оста x , се съставя силово уравнение за равновесие по оста y , където единственото неизвестно е усилието в прът 5.

$$\sum_{i=1}^n P_y = 0; \rightarrow A_y - P_1 + N_{5y} = 0 \rightarrow N_{5y} = P_1 - A_y = -3,7 \text{ kN}$$

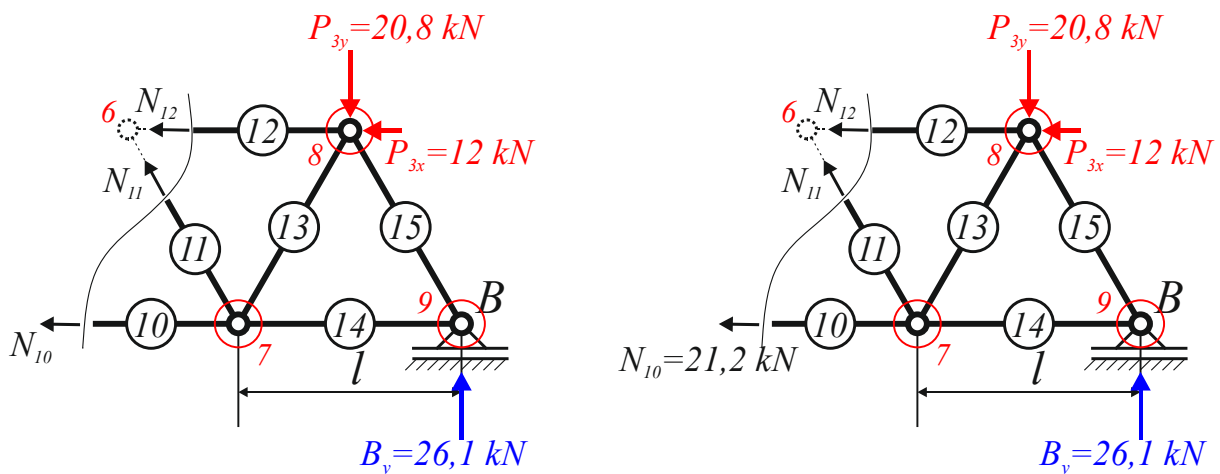
$$N_5 = \frac{-3,7}{\sin 60} = -4,27 \text{ kN} - \text{натиск!}$$



фиг. 3-17а

Разглежда се дясната част на фермата, като е направен разрез през пръти 10, 11 и 12. Понеже усилията в прътите 11 и 12 се пресичат във възел 6, се съставя моментно уравнение за равновесие спрямо него, така, че единственото неизвестно е усилието в прът 10.

$$\sum_{i=1}^n M_6 = 0; \rightarrow B_y \cdot \frac{3}{2}l - P_{3y} \cdot l - N_{10} \cdot l \cdot \sin 60 = 0 \rightarrow N_{10} = \frac{B_y \cdot \frac{3}{2}l - P_{3y} \cdot l}{l \cdot \sin 60} = 21,2 \text{ kN} - \text{опън!}$$



фиг. 3-176

§5. Произволна пространствена система сили

5.1. Момент на сила спрямо ос

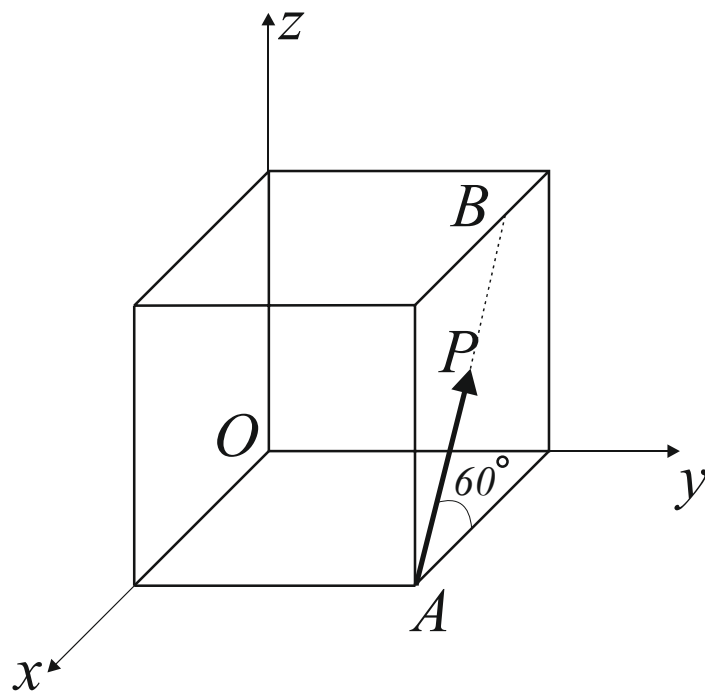
Момент на силата \vec{P} , приложена в т. А спрямо оста s е скаларната величина $M_s = P_\alpha \cdot h$, където P_α е проекция на силата \vec{P} в равнината α , която е перпендикулярна на оста s , а h е минималното разстояние между s и P_α .

Моментът на силата \vec{P} спрямо оста s ще е равен на нула когато:

- s и P_α лежат в една равнина;

- $\vec{P} = \vec{0}$.

Задача 18. Силата \vec{P} е приложена върху паралелепипед със страни a , b и c . Да се намери момента на силата \vec{P} спрямо осите на координатната система $Oxyz$.



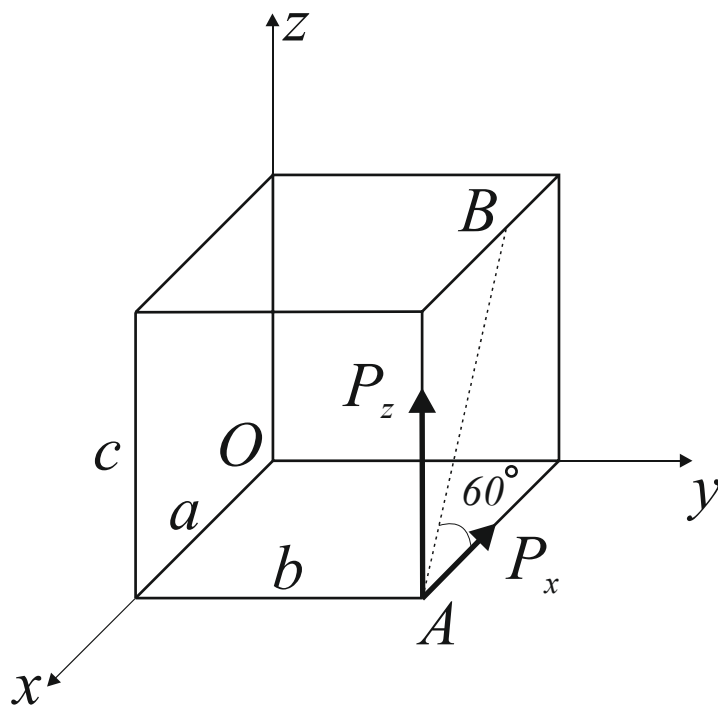
фиг. 3-18

Решение:

Силата \vec{P} се разлага по осите x и z на компонентите P_x и P_z , както следва:

$$P_x = P \cdot \cos 60 = \frac{1}{2} \cdot P;$$

$$P_z = P \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot P;$$



фиг. 3-18a

Момент спрямо оста x създава само P_z , защото не е успоредна на оста x и не я пресича; P_x не създава момент защото е успоредна на оста x.

$$M_x = P_z \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot P \cdot b;$$

Момент спрямо оста y създава само P_z , защото P_x пресича оста y.

$$-M_y = P_z \cdot a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot P \cdot a;$$

Момент спрямо оста z създава само P_x , защото P_z е успоредна на оста z.

$$M_z = P_x \cdot b = \frac{1}{2} \cdot P \cdot b;$$

5.2. Редукция на произволна пространствена система сили

Пространствената система сили е съвкупност от сили, чийто директриси лежат в различни равнини, не се пресичат в една точка и не са успоредни помежду си.

Под редукция на произволна пространствена система сили в дадена точка O, наречена редукционен център, се разбира замяната ѝ с по-проста система сили, съставена от една сила \vec{R} и един момент \vec{M}_O , чийто вектор е свързан с т. O.

Редукция на двоици сили в пространството – система от двоици сили, разположени произволно в пространството, е еквивалентна на една двоица с момент, равен на векторната сума от моментите на всички двоици - $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$.

Векторна редукция

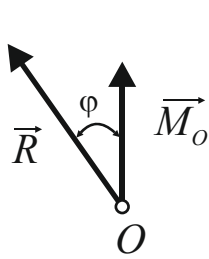
Общ случай Дадена е произволна пространствена система сили, действащи върху ИТТ. Избира се редукционен център т. O, като всички сили, които действат върху ИТТ се пренасят успоредно на себе си в т. O, образувайки една конкурентна система сили. За да не се промени първоначалното състояние на системата сили, в т. O се прилагат моментите на отделните сили спрямо т. O в съответствие с Теоремата за успоредно пренасяне на сила. Получената конкурентна система сили е еквивалентна на една сила \vec{R} , равна на векторната им сума - $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$, която се нарича **главен вектор** или главна сила.

Векторната сума $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i,O}$ от моментите приложени в т. O е равна на един **главен момент** \vec{M}_O спрямо редукционния център т. O. $\rightarrow \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i,O}$.

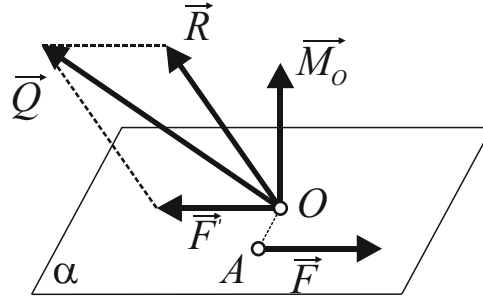
Съвкупността от главния вектор \vec{R} и главния момент \vec{M}_O се нарича динама на системата сили, еквивалентна на първоначалната система сили. \vec{R} е плъзгащ се по директрисата си вектор, а \vec{M}_O е вектор, свързан с редукционния център.

В общия случай, когато $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \varphi \neq 0, \varphi \neq \pi, \varphi \neq \pi/2$, динамата се редуцира към силов кръст или към силов винт.

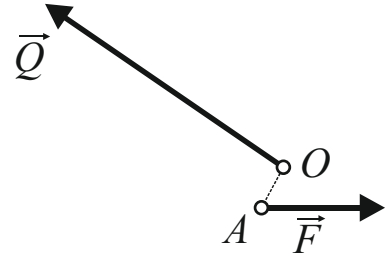
Силов кръст



фиг. 5.1а



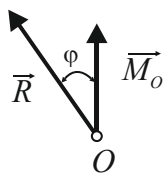
фиг. 5.1б



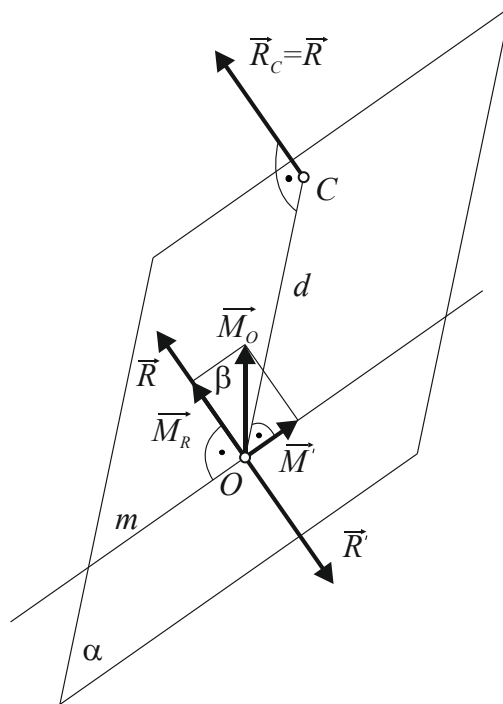
фиг. 5.1в

На фигурата е показана динама в общо положение с редуционен център т. О. През т. О, перпендикулярно на главния момент \vec{M}_O е прекарана равнината α , като главният момент е заменен с двоицата (\vec{F}, \vec{F}') , която лежи в равнината α . Главният момент е $M_O = F \cdot d$, където d е рамото на двоицата. След замяна на главния момент с двоицата сили и векторното сумиране на силите $\vec{R} + \vec{F}' = \vec{Q}$, се получава система от две кръстосани сили \vec{Q} и \vec{F} . Оттук идва и наименованието „силов кръст“.

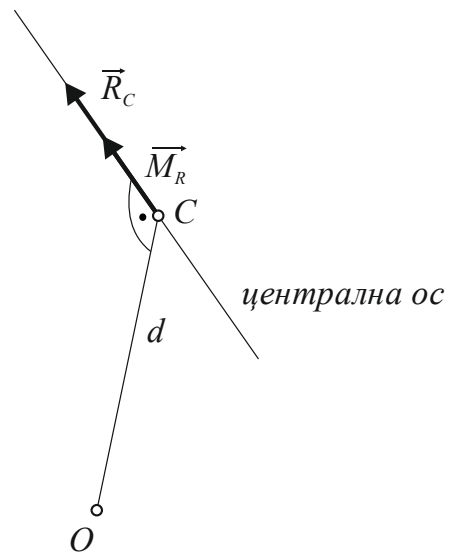
Силов винт



фиг. 5.2а



фиг. 5.2б



фиг. 5.2в

Както и в предходния случай, динамата се намира в общо положение с редуциционен център т. О. В този случай се прекарва равнина α , което е перпендикулярна на главния вектор \vec{R} . Нека равнината, която образуват главния вектор и главния момент, се обозначи с β , като $(\alpha \perp \beta)$, а m е пресечница на двете равнини. Главният момент \vec{M}_O се разлага по m и по директрисата на \vec{R} на компонентите си \vec{M}' и \vec{M}_R . Моментът \vec{M}' се замества от двоицата (\vec{R}_C, \vec{R}') , като големината на $R' = R$. Рамото на двоицата лежи в равнината α , като $d \perp \beta$, а големината му е: $d = \frac{M'}{R} = \frac{M_O \cdot \sin \varphi}{R}$. Силите \vec{R} и \vec{R}' са еквивалентни на нула, поради което могат да бъдат премахнати, без да се наруши равновесието на системата. По този начин динамата \vec{R} и \vec{M}_O се заменя с вектора \vec{R}_C и момента \vec{M}_R . Понеже \vec{M}_R е свободен вектор, той може да бъде преместен в т. С, като по този начин векторите \vec{R}_C и \vec{M}_R образуват десен силов винт, а тяхната директриса се нарича централна ос. Компонентите на получения силов винт могат да се приложат в произволна точка по направление на \vec{R}_C , тъй като \vec{M}_R е свободен вектор.

Частни случаи:

- 1) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \varphi = 0^\circ$ (или $\varphi = 180^\circ$), т.е. $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$: динамата се нарича силов винт (десен за $\varphi = 0^\circ$ и ляв за $\varphi = 180^\circ$);
- 2) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \varphi = 90^\circ$, т.е. $\vec{R} \perp \vec{M}_O$: динамата е еквивалентна на една равнодействаща \vec{R}^* , където $\vec{R}^* = \vec{R}$ и е разположена в т. С на разстояние h от т. О. $h = \frac{M_O}{R}$, а отсечката \vec{OC} и \vec{R} образуват равнина, перпендикулярна на \vec{M}_O .
- 3) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$: системата сили е еквивалентна на една двоица сили с момент $\vec{M} = \vec{M}_O$;
- 4) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: системата сили е еквивалентна на една равнодействаща $\vec{R}^* = \vec{R}$, която е приложена в т. О;
- 5) $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$: системата сили е уравновесена.

Аналитична редукция

Аналитичната редукция се свежда до аналитично решение на двете векторни уравнения – $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$, и $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O,i}$, които се проектират по осите на координатната система $Oxyz$.

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{i,x}; R_y = \sum_{i=1}^n P_{i,y}; R_z = \sum_{i=1}^n P_{i,z},$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{i,x}; M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{i,y}; M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{i,z}.$$

За големините на главния вектор и главния момент се получава:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Направленията и посоките на \vec{R} и \vec{M}_O се определят чрез косинус директорите им:

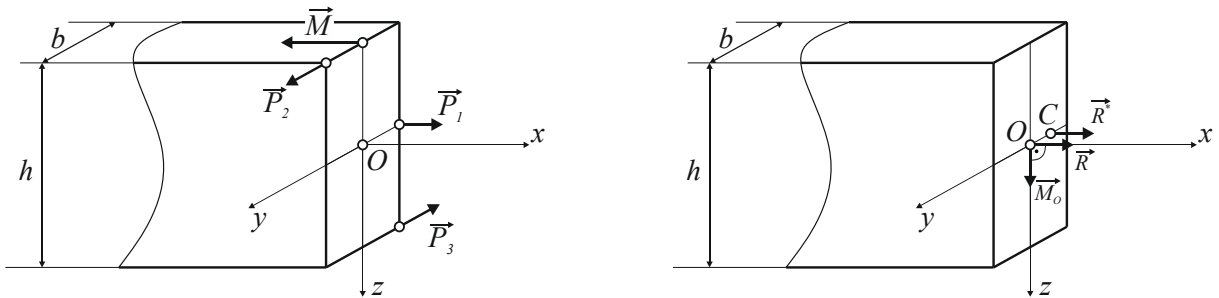
$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}; \cos \beta_R = \frac{R_y}{R}; \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R};$$

$$\cos \alpha_M = \frac{M_{Ox}}{M}; \cos \beta_M = \frac{M_{Oy}}{M}; \cos \gamma_M = \frac{M_{Oz}}{M};$$

Ъгълът φ между \vec{R} и \vec{M}_O се определя от следната зависимост:

$$\cos \varphi = \frac{R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz}}{R \cdot M_O}.$$

Задача 19. Върху паралелепипед с размери $b = 0,1 \text{ m}$ и $h = 0,3 \text{ m}$, е приложена система сили: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$ и $M = 6 \text{ kN.m}$



фиг. 3-19

За главният вектор се получава:

$$R_x = P_1 = 10 \text{ kN};$$

$$R_y = -P_2 + P_3 = 0 \text{ kN};$$

$$R_z = 0 \text{ kN};$$

$$R = R_x = 10 \text{ kN};$$

За главният момент спрямо т. О се получава:

$$M_x = -M + P_2 \cdot \frac{h}{2} + P_3 \cdot \frac{h}{2} = -6 + \frac{20 \cdot 0,3}{2} + \frac{20 \cdot 0,3}{2} = 0 \text{ kN.m};$$

$$M_y = 0 \text{ kN.m};$$

$$M_z = P_1 \cdot \frac{b}{2} = \frac{10 \cdot 0,1}{2} = 0,5 \text{ kN.m};$$

$$M_O = M_z = 0,5 \text{ kN.m}.$$

За компонентите на динамата се получава: $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \varphi = 90^\circ$, т.е. $\vec{R} \perp \vec{M}_O$: динамата е еквивалентна на една равнодействаща \vec{R}^* , където $\vec{R}^* = \vec{R}$ и е разположена в т. С на разстояние h от т. О. $h = \frac{M_O}{R}$, а отсечката \overline{OC} и \vec{R} образуват равнина, перпендикулярна на \vec{M}_O , защото $\cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ$. $h = \frac{0,5}{10} = 0,05m$. Точка С лежи на оста y на разстояние $0,05m$ от т. О.

5.3. Равновесие на тяло под действие на произволна пространствена система сили

Ако $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$, върху тялото е приложена самоуравновесена система сили. Оттук следват и шестте основни условия за равновесие (три силови и три моментови) за произволна пространствена система сили:

$$\sum_{i=1}^n P_{i,x} = 0; \sum_{i=1}^n P_{i,y} = 0; \sum_{i=1}^n P_{i,z} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i,x} = 0; \sum_{i=1}^n M_{i,y} = 0; \sum_{i=1}^n M_{i,z} = 0.$$

Освен този основен вариант съществуват следните три варианта:

- шест моментови условия за равновесие, за шест различни точки от пространството;
- пет моментови условия за равновесие и едно силово условие;
- четири моментови условия за равновесие и две силови.

Едно ИТТ в пространството е неподвижно, ако са му отнети всичките шест степени на свобода. Вариантите за обездвижване на тялото са следните:

- отнети са три степени на свобода в една точка и по една в други три;
- отнети са по две степени на свобода в три точки;
- отнети са по две степени на свобода в две точки и по една в други две точки;
- отнети са по две степени на свобода в една точка и по една в други четири точки;
- отнети са по една степен на свобода в шест различни точки.

Необходимо условие е точките да не лежат на една права!

Видове опори в пространството:

Неподвижна сферична опора – отнема три степени на свобода;

Неподвижна цилиндрична опора – отнема две степени на свобода;

Подвижна сферична опора – отнема една степен на свобода;

Подвижна цилиндрична опора – отнема една степен на свобода;

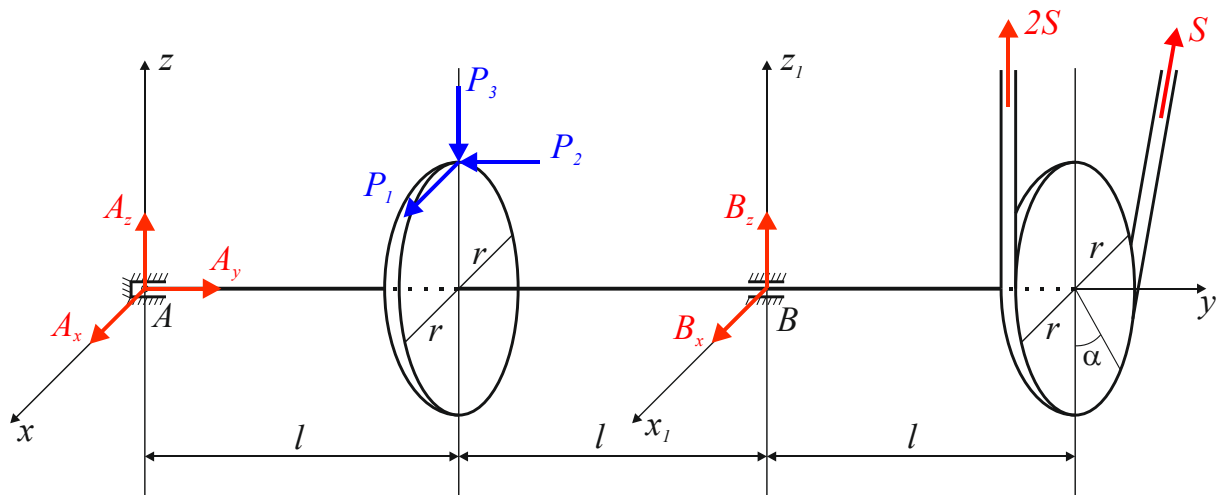
Прътова опора – отнема една степен на свобода;

Запъваща опора – отнема шест степени на свобода.

Задача 20. Вал от зъбен редуктор лагерува в радиално-аксиалния лагер *A* и радиалния лагер *B*. Върху него са заклинени шайба и зъбно колело с наклонени зъби. Силата, действаща в точката на зацепване на зъбното колело, се разлага на три компоненти: $P_1 = 4\text{ kN}$, $P_2 = 2\text{ kN}$, $P_3 = 1\text{ kN}$. Върху шайбата е опънат ремък, в двата клона на който действат съответно силите S и $2S$. Да се определят опорните реакции и стойността на силата S , ако системата е уравновесена. Разстоянието $l = 0,2\text{ m}$, а радиусите на зъбното колело и шайбата са равни с големина $r = 0,1\text{ m}$; ъгъл $\alpha = 60^\circ$.

Решение

Съставят се шестте основни независими уравнения за равновесие, като в т. *A*, където лагерува радиално-аксиалният лагер, неизвестни са трите опорни реакции - A_x, A_y, A_z ; в т. *B*, където лагерува радиалният лагер, неизвестни са двете опорни реакции - B_x, B_z . Като се добави и търсеното усилие S в ремъка, неизвестните сили и опорни реакции са общо шест, колкото са и независимите уравнения за равновесие.



фиг. 3-20

Шестте уравнения придобиват следния вид:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow A_x + P_1 + B_x - S_x = 0, \text{ където } S_x = S \cdot \cos \alpha;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow A_y - P_2 = 0 \rightarrow A_y = P_2 = 2\text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow A_z - P_3 + B_z + 2S + S_z = 0, \text{ където } S_z = S \cdot \sin \alpha;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \rightarrow P_2 \cdot r - P_3 \cdot l + B_z \cdot 2l + 2S \cdot 3l + S_z \cdot 3a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \rightarrow P_1 \cdot r - 2S \cdot r + S \cdot r = 0 \rightarrow S = P_1 = 4 \text{ kN};$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \rightarrow -P_1 \cdot l - B_x \cdot 2l + S_x \cdot 3l = 0,$$

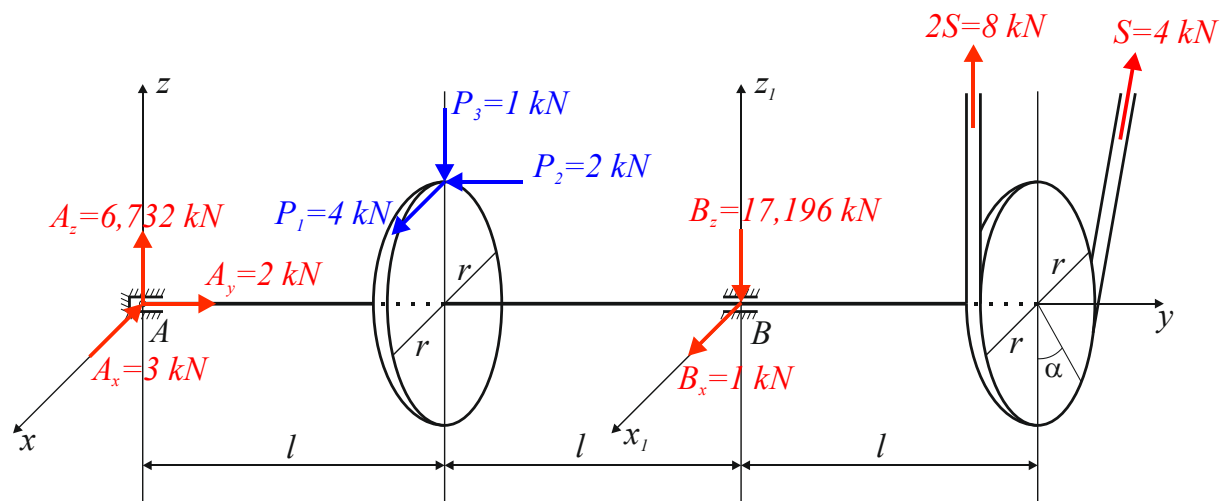
След като от уравнения 2 и 5 са намерени съответно A_y и S , от уравнение 6 се намира B_x , както следва: $B_x = \frac{-4,0,2+4 \cdot \cos 60 \cdot 3,0,2}{2,0,2} = 1 \text{ kN}$; от уравнение 1 се намира A_x . $A_x = S \cdot \cos \alpha - P_1 - B_x = -3 \text{ kN}$.

В уравнение 4 единственото неизвестно е B_z , като се получава следният израз:

$$B_z = \frac{P_3 \cdot l - P_2 \cdot r - 2S \cdot 3l - S \cdot \sin 60 \cdot 3l}{2l} = \frac{1,0,2 - 2,0,1 - 2,4 \cdot 3,0,2 - 4,0,866 \cdot 3,0,2}{2,0,2} = -17,196 \text{ kN}.$$

От уравнение 3 се намира и последното неизвестно усилие A_z :

$$A_z = P_3 - B_z - 2S - S \cdot \sin 60 = 1 - (-17,196) - 2,4 - 4,0,866 = 6,732 \text{ kN}.$$



фиг. 3-20а

§6. Център на тежестта

6.1. Система успоредни сили

Съвкупност от сили, чийто директриси са успоредни и нележащи в една равнина, се нарича пространствена система успоредни сили. Когато директрисите им са успоредни, но режат в една равнина, силите образуват равнинна система успоредни сили.

Векторна редукция

Редукцията се извършва, както при произволна пространствена система сили.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i;$$

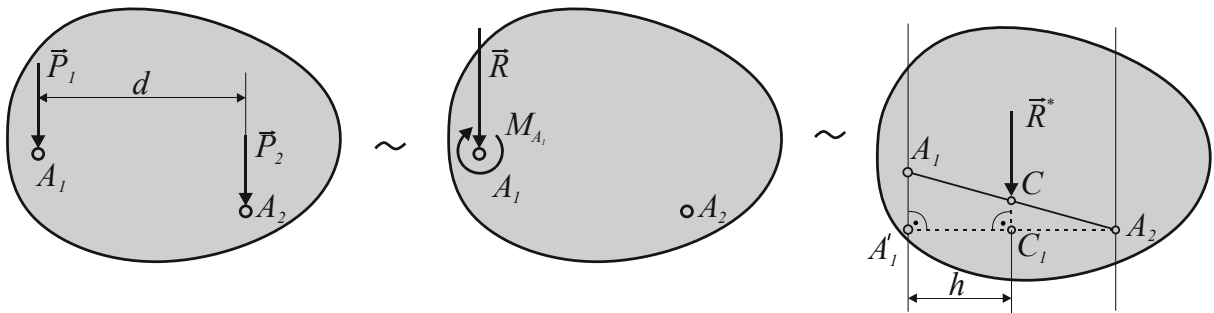
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i,O}.$$

Като се вземе предвид, че моментите $\vec{M}_{i,O}$ са перпендикулярни на направленията на силите \vec{P}_i , то следва, че главният момент \vec{M}_O лежи в равнина, перпендикулярна на главния вектор \vec{R} , или $\vec{R} \perp \vec{M}_O$. От тук следва, че динамата на система успоредни сили, винаги е еквивалентна на една равнодействаща \vec{R}^* .

В частния случай на равнинна система успоредни сили се приема, че силите лежат в равнината Oxy и са успоредни на оста y , $\vec{M}_O \perp Oxy$.

6.2. Център на система успоредни сили

Равнодействаща на две успоредни сили



фиг. 6.1

Дадени са две успоредни сили \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , приложени съответно в т. A_1 и т. A_2 , а d е разстоянието между тях. Избира се т. A_1 за редуциционен център. За главния вектор и главния момент се получава: $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$; $\vec{M}_{A_1} = \overline{A_1A_2} \times \vec{P}_2$, а големините им съответно са: $R = P_1 + P_2$; $|M_{A_1}| = P_2 \cdot d$. Понеже $\vec{R} \perp \vec{M}_{A_1}$, за равнодействащата и нейното положение следва: $R^* = R$; $h = \frac{|M_{A_1}|}{R} = \frac{P_2 \cdot d}{P_1 + P_2}$ или $\overline{A_1C} = \frac{P_2 \cdot \overline{A_1A_2}}{P_1 + P_2}$.

Обобщена моментова теорема на Вариньон

Главният момент на една система сили, дефиниран спрямо произволна точка, е равен на момента на равнодействащата им спрямо тази точка.

Доказателство: Нека \vec{R}^* е равнодействаща на система сили \vec{P}_i и е приложена в т. С. Моментът на \vec{R}^* спрямо произволна т. О е: $\vec{M}_O(\vec{R}^*) = \vec{OC} \times \vec{R}^*$.

Ако системата сили \vec{P}_i се редуцира в т. О, тя ще е еквивалентна на динама с главен вектор \vec{R} и главен момент \vec{M}_O . \vec{R} и \vec{M}_O са взаимноперпендикулярни понеже системата сили \vec{P}_i има равнодействаща \vec{R}^* , но по определение главният момент \vec{M}_O е: $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times \vec{P}_i$. Динамата \vec{R} и \vec{M}_O може да се замени с равнодействащата \vec{R}^* , приложена в т. С с големина $R^* = R$, чийто момент спрямо т. О е: $\vec{M}_O(\vec{R}^*) = \vec{M}_O$.

Оттук следва: $\vec{OC} \times \vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times \vec{P}_i$, с което теоремата е доказана.

Център на система успоредни сили

Дадена е система успоредни сили \vec{P}_i , приложени в точки A_i от ИТТ. Главният вектор е $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$. Системата има равнодействаща \vec{R}^* , понеже главният момент \vec{M}_O е перпендикулярен на главния вектор \vec{R} .

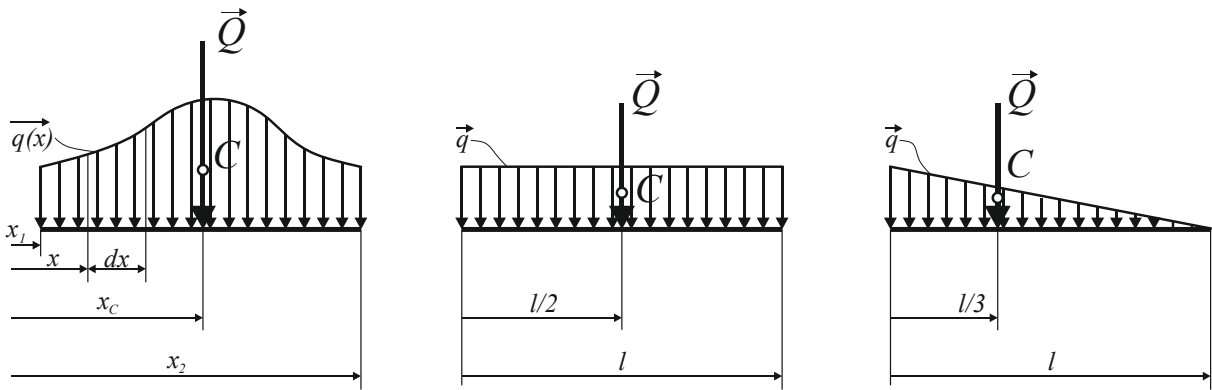
Радиус векторът на т. С се намира чрез обобщената теорема на Вариньон: $\vec{OC} \times \vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times \vec{P}_i$. Равенството може да се представи във вида: $\vec{OC} \times R^* \cdot \vec{e} = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times P_i \cdot \vec{e}$, където \vec{e} е единичен вектор, успореден на \vec{P}_i . Полученото равенство ще е валидно, ако $\vec{OC} \times R^* = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times P_i$ или $\vec{OC} \times \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \times P_i$. След проектиране на уравнението върху координатните оси, за координатите на центъра на успоредните сили т. С се получава:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}; y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}; z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i};$$

Формулите са в сила и за успоредни сили, имащи различни посоки. Необходимо е в този случай да се отчита знака на съответната сила.

6.3. Център на тежестта на разпределени товари

В инженерната практика много често се срещат товари, които са разпределени по повърхнина или по линия по определен закон. От голямо значение в статиката са линейно разпределените товари, които действат в една равнина. Основна характеристика на линейните товари е тяхната интензивност q , $[N/m]$, чийто физически смисъл е големина на сила за единица дължина. Интензивността q в общия случай е функция на абсцисата x .



фиг. 6.2

Когато се търсят опорни реакции в статически определими задачи, е необходимо правилното заместване на тези линейни товари с еквивалентни на тях съсредоточени сили. Съсредоточената сила представлява равнодействаща Q на линейния товар, като големината ѝ е равна на площта на защрихованата фигура, определена от абсцисата x , кривата, определена от закона, по-който е разпределен товара и неговите начало и край:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx;$$

Директрисата на \vec{Q} минава през центъра на тежестта на фигурата, определена от разпределения товар, като абсцисата ѝ x_c се определя от следната формула:

$$x_c = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xq(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} q(x) dx};$$

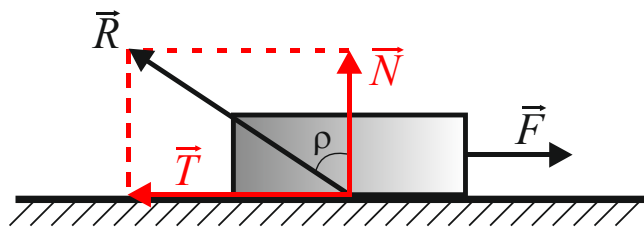
За по-често срещаните случаи на равномерно разпределен товар и линейно разпределен товар, равнодействащите им имат съответно следните големина: $Q = ql$; $Q = \frac{1}{2}ql$, а директрисите им минават през центъра на тежестта на правоъгълника и на триъгълника, който разпределените товари образуват заедно с абсцисата.

§7. Триене

7.1. Триене при покой и при плъзгане

Тяло е поставено върху неподвижна хоризонтална равнина. Силите на взаимодействие при допиране между тялото и неподвижната равнина \vec{P} и \vec{N} се уравниават, като са насочени по нормалата n . Ако към тялото се приложи и една хоризонтална сила \vec{F} , състоянието му на покой ще се запази, докато \vec{F} не получи големина, равна на една гранична стойност \vec{F}_0 . Тъй като равновесието на тялото се

запазва и опорната реакция не е насочена по нормалата n , а е наклонена под ъгъл ρ , опорната реакция \vec{R} се разделя на две компоненти: \vec{N} – нормална реакция, \vec{T} – сила на триене. В гранично равновесие, при $\vec{F} = \vec{F}_0$, силата на триене достига гранична стойност T_0 : $\vec{T}_0 = -\vec{F}_0$, след което тя не може да нараства, докато \vec{F} може да има големина, по-голяма от F_0 . Следователно, големината на силата на триене \vec{T} се изменя в интервала $0 \leq T \leq T_0$. Силата \vec{T}_0 се нарича сила на триене при покой. Съгласно закона на Кулон за триене при покой $T_0 = \mu_0 N$, където μ_0 се нарича коефициент на триене при покой.



фиг. 7.1

Коефициентът на триене при покой може да бъде изразен чрез ъгъла ρ_0 , който е сключен между \vec{N} и \vec{R} при $T = T_0$. Между ρ_0 и μ_0 съществува зависимостта: $\mu_0 = \tan \rho_0$.

Ако силата \vec{F} има големина $F > F_0$, тялото започва да се движи, като силата на триене по време на плъзгане се определя от зависимостта: $T = \mu N$, където μ се нарича коефициент на триене при плъзгане. Установено е, че коефициента на триене при плъзгане винаги е по-малък от този на триене при покой - $\mu < \mu_0$.

Задача 21. Товар с тегло \vec{Q} се повдига чрез вертикален винт А и гайка В с правоъгълна резба (фиг. 3-21). Да се определи стъпката на резбата, при която винтът няма да се саморазвие под действието на товара, т.е. той да бъде самоспиращ. Коефициентът на триене между винта и гайката е μ_0 , а средният радиус на винтовата повърхност е R .

Решение:

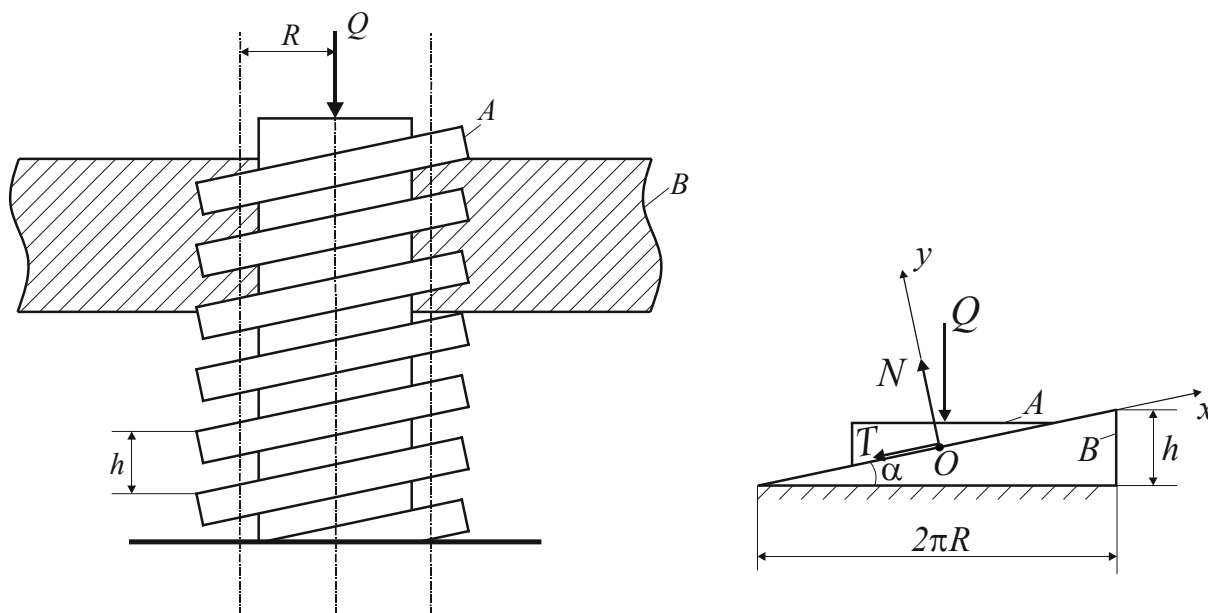
Винтът А и гайката В контактуват по цялата си обща повърхност от винтовата повърхнина. Този контакт е аналогичен на взаимодействие между два еднакви клина А и В с ъгъл при върха, равен на ъгъла на наклона на винтовата линия. Разглежда се равновесието на подвижния клин, при което се получават уравненията:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -Q \cdot \sin \alpha + T = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow N - Q \cdot \cos \alpha = 0.$$

При покой: $T \leq \mu_0 N$.

От съвместното решаване на горните уравнения се получава условието за равновесие $\mu_0 \geq \tan \alpha$. От друга страна, $\tan \alpha = \frac{h}{2\pi R}$ (виж фиг. 3-21), където h е стъпката на винтовата линия. Следователно $\mu_0 \geq \frac{h}{2\pi R}$. От тази зависимост се получава условието за големината на стъпката, при която винтът е самозадържащ - $h \leq 2\pi\mu_0 R$.



фиг. 3-21

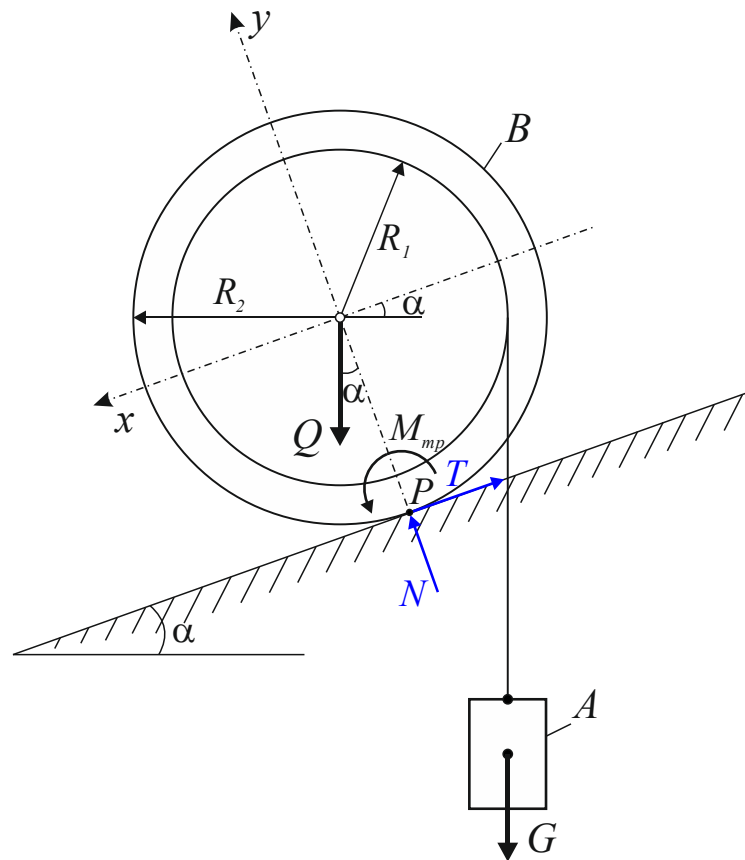
7.2. Триене при търкаляне

Разглежда се цилиндрично тяло с радиус r и тегло \vec{G} , лежащо върху неподвижна повърхнина. Тялото ще остане в покой, докато моментът $M_{\text{тр}}$ от приложените върху него сили спрямо точката на допиране P на тялото с повърхнината е: $0 \leq M_{\text{тр}} \leq N \cdot f_0$, където f_0 е коефициент на триене при търкаляне, който се измерва в метри, m .

Моментът $\vec{M}_{\text{тр}}$ се нарича момент на триене при търкаляне. Той може да се представи чрез граничната сила на триене при търкаляне F_0^T , чиято големина е: $F_0^T = \frac{M_{\text{тр}}}{r} = \frac{f_0}{r} N = \mu^* N$, където μ^* се нарича приведен коефициент на триене, $\mu^* = \frac{f_0}{r}$.

Задача 22. Товар A с тегло G е окачен към единия край на въже, а другият край на въжето е навит върху барабан с макара с радиуси R_1 и R_2 и тегло Q (фиг. 3-22). Макаратата е поставена върху наклонена под ъгъл α спрямо хоризонта равнина. Коефициентът на

триене при търкаляне е f . Да се определи при каква големина на товара G и при каква големина на коефициента на триене при покой е възможно системата да се намира в равновесие.



фиг. 3-22

Решение

Прилагат се действащите върху макаратата сили заедно с реакциите в точката на допиране P . Съставят се уравненията за равновесие по двете оси x и y :

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow (G + Q) \cdot \sin \alpha - T = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -(G + Q) \cdot \cos \alpha + N = 0.$$

При съставянето на моментовото уравнение за равновесие трябва да се отчете, че моментът на триене при търкаляне е реактивен момент и е насочен обратно на посоката на въртене. В случая, когато теглото на товара има максимална големина, $M_{тр}$ е насочен обратно на часовниковата стрелка, а при минимална големина на теглото, $M_{тр}$ ще има обратна посока.

При G_{max} се получава:

$$\sum_{i=1}^n M_P = 0 \rightarrow Q \cdot R_2 \cdot \sin \alpha + M_{\text{Тр}} - (R_1 - R_2 \cdot \sin \alpha) \cdot G = 0.$$

При G_{\min} се получава:

$$\sum_{i=1}^n M_P = 0 \rightarrow Q \cdot R_2 \cdot \sin \alpha - M_{\text{Тр}} - (R_1 - R_2 \cdot \sin \alpha) \cdot G = 0.$$

Ако към горните уравнения се прибавят и уравненията:

$$T \leq \mu_0 N,$$

$$M_{\text{Тр}} \leq fN.$$

за товара G_{\max} се получава:

$$G \leq Q \frac{f \cos \alpha + R_2 \sin \alpha}{R_1 - R_2 \sin \alpha - f \cos \alpha}.$$

за товара G_{\min} се получава:

$$G \geq Q \frac{-f \cos \alpha + R_2 \sin \alpha}{R_1 - R_2 \sin \alpha + f \cos \alpha}.$$

При съвместно решаване на уравнения:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow (G + Q) \cdot \sin \alpha - T = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -(G + Q) \cdot \sin \alpha + N = 0;$$

се получава: $\mu_0 \geq \tan \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beer, F.P., E. R. Jonhston Jr, D. F. Mazurek, P. J. Cornwell, Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition, 2013.

[2] Meriam, J. L., L. G. Kraige, Engineering Mechanics: Volume 1, Statics, seventh edition, 2012.

[3] Максимов Й. Т., Теоретична механика, ЕксПрес, Габрово, 2016.

[4] Бъчваров, С. Н., А. А. Джонджоров, Б. И. Чешанков, Н. К. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по Теоретична механика, С, 1973.

[5] Тепавичаров Хр., Д. Валачев, А. Анчев, Ръководство за решаване на задачи по статика, УИ В. Априлов, Габрово, 2009.