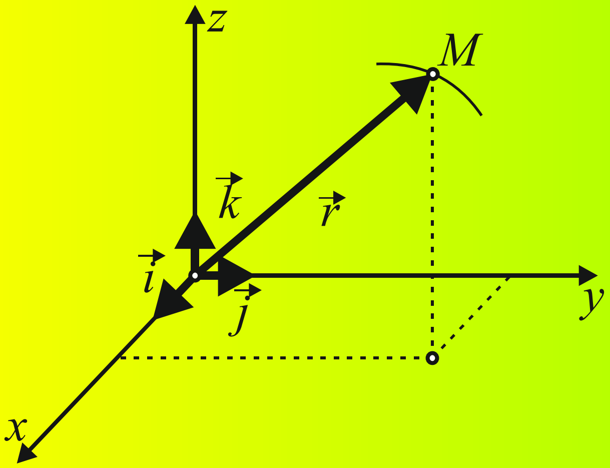
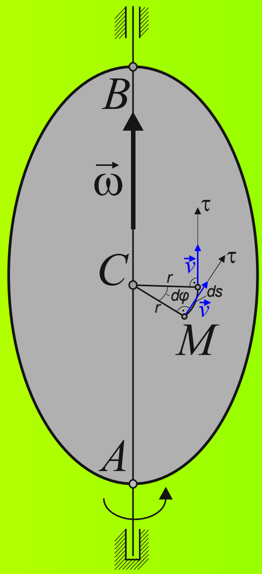
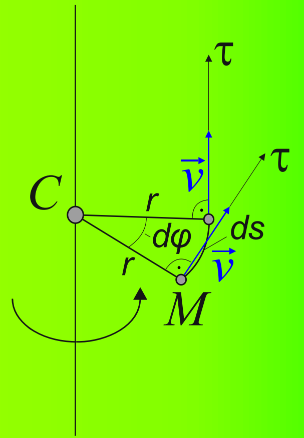
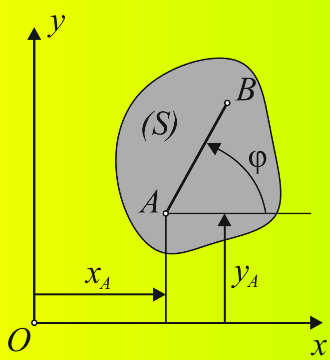
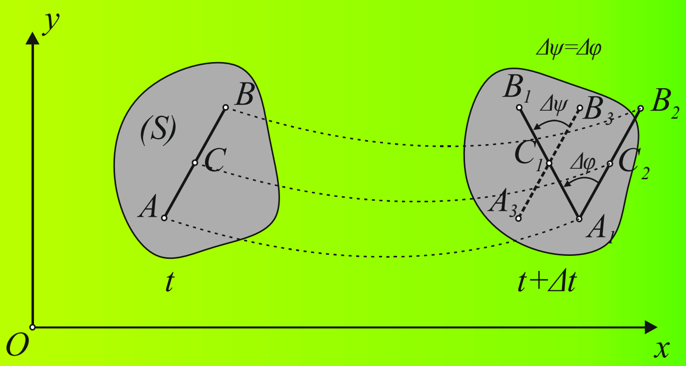
Владимир Дунчев



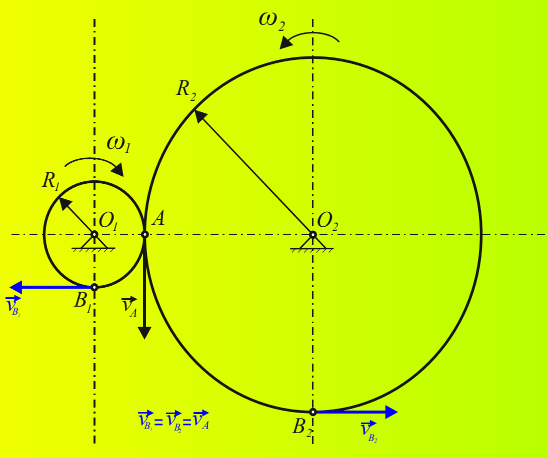


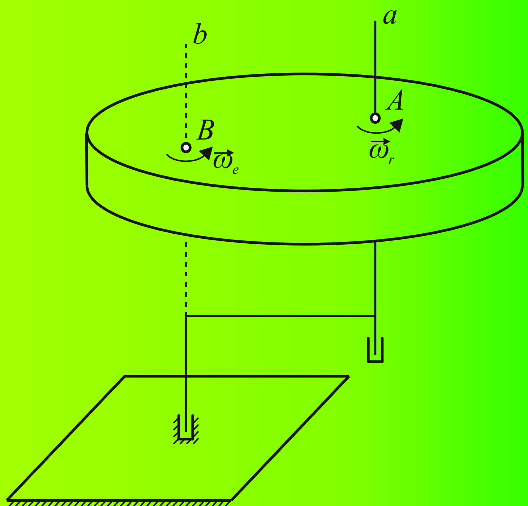






РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО КИНЕМАТИКА





2020

Владимир Дунчев

Ръководство за решаване на задачи по кинематика

УНЕВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
„ВАСИЛ АПРИЛОВ“
ГАБРОВО, 2020

Ръководството за решаване на задачи по Кинематика е предназначено за студентите от всички специалности в професионални направления „Машинно инженерство“ и „Общо инженерство“, с цел по-лесно усвояване на учебния материал от раздел Кинематика на дисциплината Механика I. В него са разгледани различни типове задачи, които могат да послужат като основа за решаване на предвидените в учебния план курсови задачи. Ръководството е структурирано в няколко основни раздела, в които има кратки теоретични пояснения, последвани от решени примери.

Ръководството може да се използва като основа за решаване на конкретни проблеми в инженерната практиката.

От автора

Ръководство са решаване на задачи по Кинематика

Българска

Първо

Рецензент: проф. Йордан Тодоров Максимов, дтн, ктн

ISBN: 978-954-683-627-4

Съдържание

I. Кинематика на точка

§1. Уравнение на движение

Определение – математичният модел, описващ зависимостта на заеманото от точката положение в пространството във функция от времето, се нарича уравнение или закон на движение.

Методи за задаване на движението:

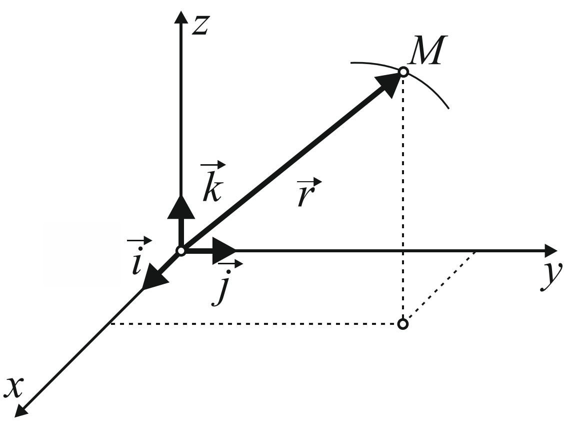
- Векторен метод – движещата се точка се намира в неподвижната координатна система *Oxyz,* като радиус-вектора ѝ се променя във времето - $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

- Координатен метод - $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, където $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ са единични вектори.

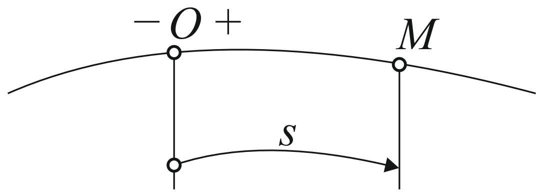
$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – зависимости за уравненията на движение в декартова координатна система.

- Естествен начин на задаване на движението на точка – при предварително известна траектория на точката. Положението ѝ се задава чрез естествената координата $s = s(t)$.

Траектория – кривата, която описва върха на радиус-вектора на точката.



Фиг. 1а

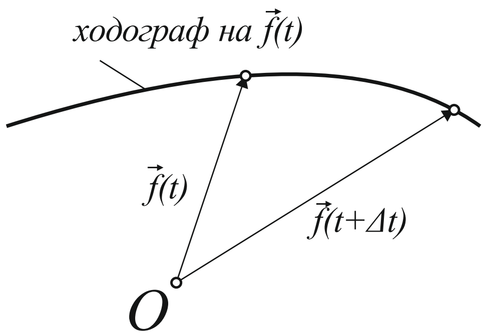


Фиг. 1б

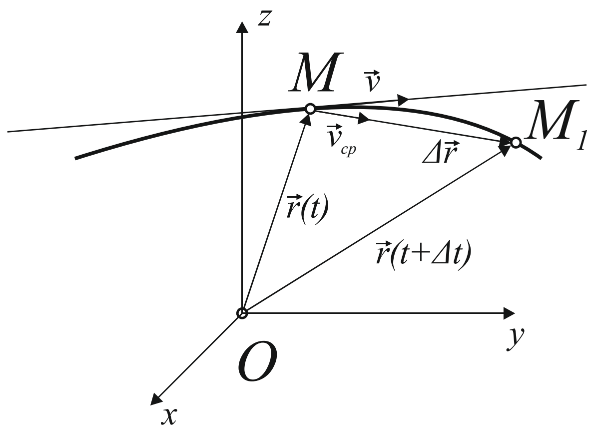
§2. Скорост на точка

2.1. Ходограф на векторна функция – ***кривата, описана от върха на векторната функция $\vec{f}(t)$ за последователните ѝ положения, когато се нанася от едно начало.***

Траекторията на точката е ходограф на радиус-вектора ѝ.



Фиг. 2а



Фиг. 2б

2.2. Скорост

Определение за скорост – *скоростта на точка е векторна величина, определяща бързината, с която се изменя нейният радиус-вектор.*

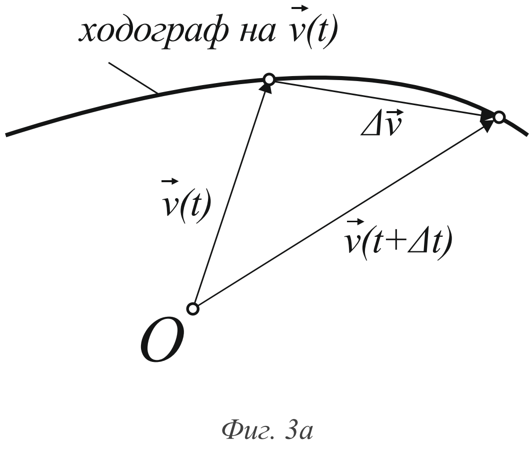
- $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \overrightarrow{v_{ср}}$ – средна скорост;

Границата на това отношение е: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$ – моментна скорост, или $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$;

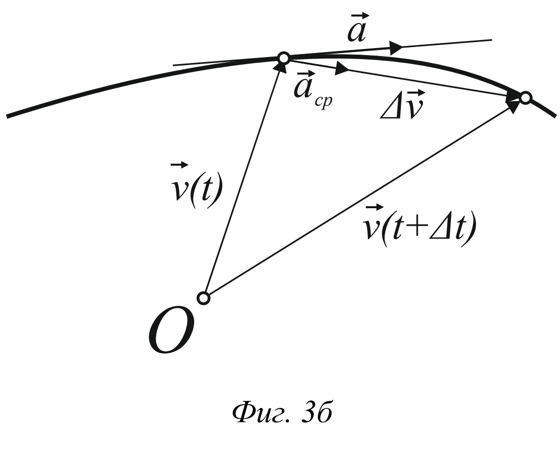
Проекциите на скоростта по координатните оси са равни на: $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, за големината на скоростта се получава: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

§3. Ускорение на точка

Определение за ускорение – *ускорение на точка е векторна величина, определяща бързината, с която се изменя векторът скорост на точка.*



Фиг. 3а



Фиг. 3б

- $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \overrightarrow{a_{ср}}$ – средно ускорение;

Границата на това отношение е: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$ – моментно ускорение, или $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$;

Проекциите на ускорението по координатните оси са равни на: $a_x = \dot{v}_x$, $a_y = \dot{v}_y$, $a_z = \dot{v}_z$, за големината на ускорението се получава: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

<u>Задача 1.</u> Точка започва да се движи по права линия, без начална скорост, с ускорение $a(t) = 3t^2 - t^3$, където t е времето в секунди. След колко секунди големината на скоростта на точката отново ще бъде равна на нула.

Решение:

$v(t) = \int a(t)dt = \int (3t^2 - t^3)dt = \frac{3t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C = t^3 - \frac{t^4}{4} + C$, но $v(0) = 0 \ \rightarrow$

$v(0) = 0^3 - \frac{0^4}{4} + C \ \rightarrow C = 0$. За скоростта се получава: $v(t) = t^3 - \frac{t^4}{4}$. Разлага се полученият израз на множители и се получава: $v(t) = t^3\left(1 - \frac{t}{4}\right)$. Очевидно първият множител включва решение на задачата за началния момент, докато вторият множител дава решение на задачата за търсения момент. Задачата се свежда до решаване на следното уравнение относно t: $1 - \frac{t}{4} = 0 \ \rightarrow t = 4\ s$.

<u>Задача 2</u>. Точка се движи по права линия по закона $x(t) = 3t^4$. След колко секунди големината на ускорението на точката ще бъде а $= 144\ m/s^2$.

Решение:

$\mathrm{a}(t) = \ddot{x}(t) \ \rightarrow \ \dot{x} = 12t^3 \ \rightarrow \ddot{x} = 36t^2 \ \rightarrow \ 36t^2 = 144 \ \rightarrow \ t^2 = \frac{144}{36} = 4 \ \rightarrow t = 2\ s.$

<u>Задача 3</u>. Точка се движи по права линия с постоянно ускорение а $= 4\ m/s^2$. Да се намерят големините на скоростта v и преместването x в края на третата секунда от движението на точката, ако началните условия са: $x(0) = 1\ m, v(0) = 2\ m/s$.

Решение:

За да се намери големината на скоростта v, се използва зависимостта: $v(t) = \int a(t)dt$, откъдето за v се получава: $v(t) = \int a(t)dt = \int 4dt = 4t + C_1$. Използвайки началното условие за скоростта v се намира големината на константата C_1.

$v(0) = 4.0 + C_1 \rightarrow 2 = 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 2.$

$v(t) = 4t + 2 \rightarrow v(3) = 4.3 + 2 = 14\, m/s.$

За преместването x се използва зависимостта: $x(t) = \int v(t)dt$, откъдето за x се получава: $x(t) = \int v(t)dt = \int (4t + 2)\, dt = 2t^2 + 2t + C_2$. Използва се началното условие за преместването x , за да се намери големината на константата C_2.

$x(0) = 2.0^2 + 2.0 + C_2 \rightarrow 1 = 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 1.$

$x(t) = 2t^2 + 2t + 1 \rightarrow x(3) = 2.3^2 + 2.3 + 1 = 25\, m.$

Задача 4. Точка се движи по закона $x(t) = 3t^3 - 5t, y(t) = 20t - 12t^3$. Да се намери уравнението на траекторията на точката.

Решение:

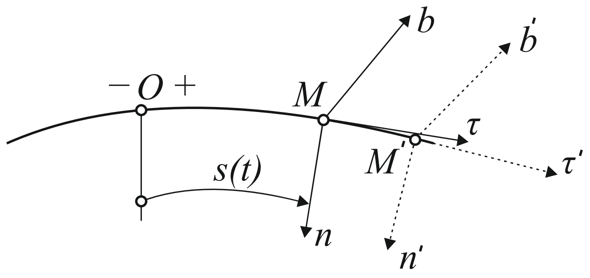
След елиминиране на времето t от уравненията на движение се намира траекторията на точката:

$$\frac{x}{y} = \frac{3t^3 - 5t}{20t - 12t^3} = \frac{3t^3 - 5t}{-4.(3t^3 - 5t)} \rightarrow y = -4x.$$

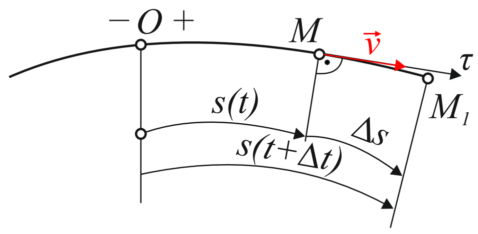
§4. Изследване на движението на точка в естествени координати

4.1. Триедър на Frene

Траекторията на точка M е предварително известна. Движението на точката в пространството се отчита спрямо правоъгълната координатна система $M\tau nb$, наречена триедър на Frene, която се движи заедно с точката. Началото на координатната система във всеки един момент съвпада с позицията на точката в пространството. Равнината, в която се движи точката, се нарича оскулачна равнина. Тя е образувана от тангентата $M\tau$ към траекторията на точката и нормалата Mn, която е насочена към вдлъбнатостта на траекторията ѝ. Оскулачната равнина се означава с $M\tau n$. Третата ос Mb се нарича бинормала и е перпендикулярна на оскулачната равнина, като трите оси винаги образуват дясно ориентирана координатна система.



Фиг. 4а



Фиг. 4б

4.2. Определяне на скоростта в естествени координати

Средната скорост в интервала $t, t + \Delta t$ е:

- $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$ – средна скорост;

Границата на това отношение е: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ – моментна големина на скорост, или $v = \dot{s}$.

4.3. Определяне на ускорението в естествени координати

В безкрайно малкият интервал от време точката се е преместила от т. M до т. M_1, а ускорение е равно на: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_1} - \vec{v}}{\Delta t}$, където $\vec{v}$ е скоростта в т. M, а $\overrightarrow{v_1}$ е скоростта в т. M_1. Точката се движи по произволна траектория в пространството, в следствие на което векторът скорост $\overrightarrow{v_1}$ в т. M_1 е завъртян на диференциално малък ъгъл $\Delta\varphi$ спрямо вектора скорост $\vec{v}$ в т. M. След разлагане на $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v_1} - \vec{v}}{\Delta t}$ по осите τ и n за проекциите на ускорението се получават следните изрази.

$a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}$; $a_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}$, където: $v_{1\tau} = v_1 \cos\Delta\varphi$, $v_\tau = v$, а $v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi$, $v_n = 0$.

Тангенциалното ускорение е векторът $\overrightarrow{a_\tau} = a_\tau . \overrightarrow{e_\tau}$;

За големината му се получава: $a_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}$, тъй като при $\Delta t \to 0, \Delta\varphi \to 0$, откъдето за $\cos\Delta\varphi \to 1$.

Нормалното ускорение е векторът $\overrightarrow{a_n} = a_n . \overrightarrow{e_n}$;

За големината му се получава: $a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \sin \Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 . \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} . \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} . \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$.

При $\Delta t \to 0 \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, $\lim_{\Delta t \to 0} v_1 = v$, където k е кривина, а ρ е радиус на кривина, или за нормалното ускорение се получава: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

Пълното ускорение на точката е равно на векторната сума на тангенциалното и нормалното ускорения: $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$, а големината му е равна на: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

<u>Задача 5</u>. Точка се движи по окръжност с радиус $R = 1\ m$ по закона $s(t) = 4t^3$. Да се намерят големините на скоростта, тангенциалното ускорение и нормалното ускорение на точката в края на втората секунда от нейното движение.

Решение:

Големината на скоростта на точката е равна на: $v = \dot{s} \rightarrow v(t) = 12t^2$. В края на втората секунда за големината ѝ се получава: $v(2) = 12.2^2 = 48\ m/s$.

Големината на тангенциалното ускорение е равно на: $a_\tau = \dot{v} \rightarrow a_\tau(t) = 24t$. В края на втората секунда за големината му се получава: $a_\tau(2) = 24.2 = 48\ m/s^2$.

За големината на нормалното ускорение следва: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{48^2}{1} = 2304\ m/s^2$.

<u>Задача 6</u>. Точка се движи по окръжност с радиус $R = 2\ m$ по закона $s(t) = 8t - 2t^3$. Да се намерят големините на скоростта, тангенциалното ускорение и нормалното ускорение на точката в края на първата секунда от нейното движение.

Решение:

Големината на скоростта на точката е равна на: $v = \dot{s} \rightarrow v(t) = 8 - 8t^2$. В края на първата секунда за големината ѝ се получава: $v(1) = 8 - 8.1^2 = 0\ m/s$.

Големината на тангенциалното ускорение е равно на: $a_\tau = \dot{v} \rightarrow a_\tau(t) = -16t$. В края на втората секунда за големината му се получава: $a_\tau(1) = -16.1 = -16\ m/s^2$ (посоката на движение е противоположна на посоката на тангенциалното ускорение, т.е. точката се забавя).

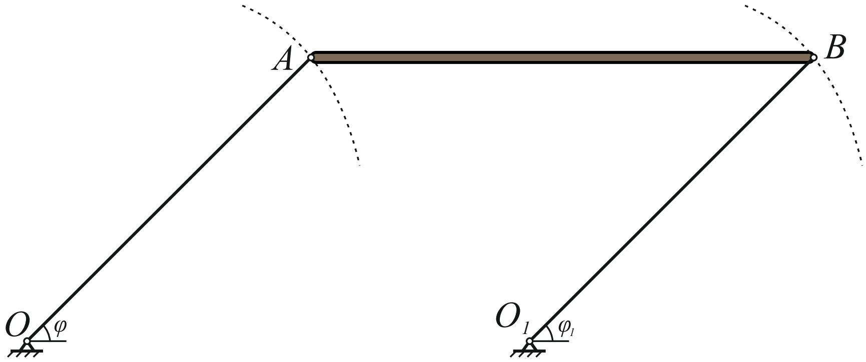
За големината на нормалното ускорение се получава: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{0^2}{2} = 0\ m/s^2$.

II. Кинематика на идеално твърдо тяло

§1. Постъпателно движение на идеално твърдо тяло

Определение за идеално твърдо тяло – *тяло, на което разстоянието между кои да е две точки остава постоянно за целият интервал от време, се нарича идеално твърдо тяло (ИТТ).*

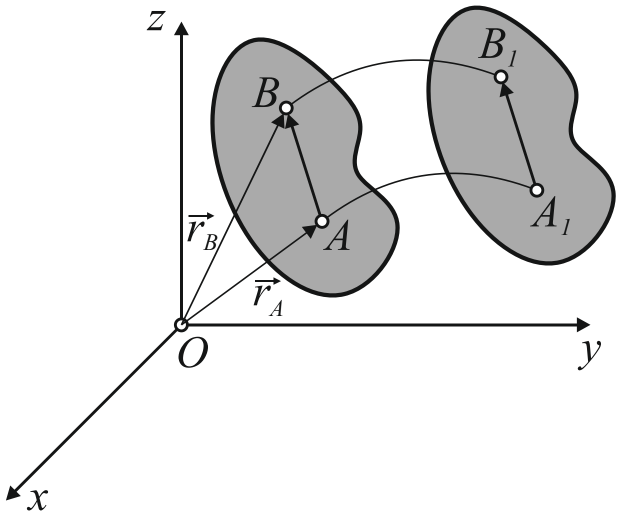
Определение за постъпателно движение – *постъпателно движение се нарича движение на ИТТ, при което всяка права от тялото се премества успоредно на себе си.*



Фиг. 5

Свойства на постъпателното движение:

- Всички точки от ИТТ описват еднакви траектории;



Фиг. 6

- Всички точки от ИТТ имат еднакви по големина и направление скорости в един и същ момент от времето;

- Всички точки от ИТТ имат еднакви по големина и направление ускорения в един и същ момент от времето;

Доказателство:

$\overrightarrow{AB} = \overline{const},$ а $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{AB}$, тъй като $\overrightarrow{AB} = \overline{const},$ за траекторията на т. В се получава, че е изместена успоредно спрямо траекторията на т. А на разстояние постоянния вектор $\overrightarrow{AB}$.

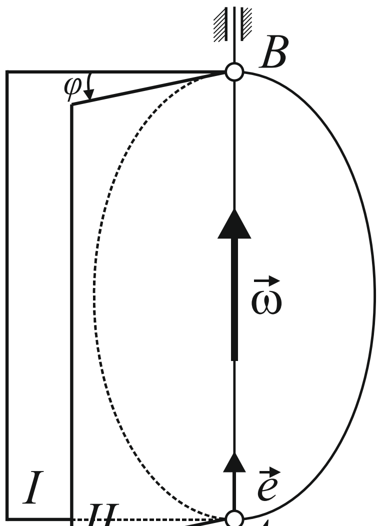
След диференциране на израза $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{AB}$, за скоростта на т. В се получава: $\dot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{r_A}} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}$, или $\dot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{r_A}} \rightarrow \overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A}$.

За ускорението на т. В се получава: $\dot{\overrightarrow{v_B}} = \dot{\overrightarrow{v_A}} \rightarrow \overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A}$.

§2. Въртене около неподвижна ос на ИТТ

Определение – *когато две, кои да е, точки А и В от тялото остават през цялото време на движение неподвижни, тялото се върти около неподвижна ос, определена от т. А и т. В.*

2.1. Закон за движение – мислено се прекарват две полуравнини, съдържащи неподвижната ос на въртящото се тяло, първата е неподвижна, а втората се върти заедно с ИТТ. Положението на тялото се определя еднозначно чрез ъгъла между двете полуравнини. Зависимостта $\varphi = \varphi(t)$ се нарича закон на движение на тяло, което извършва въртене около неподвижна ос.



Фиг. 7

2.2. Ъглова скорост

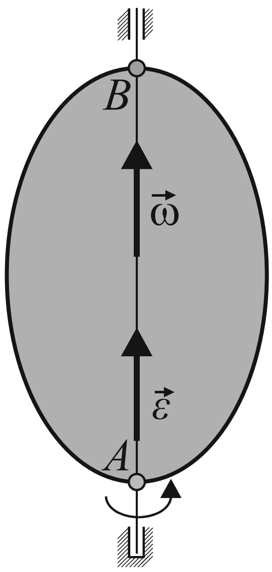
Векторната величина, определена от границата на отношението $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \vec{e} = \vec{\omega}$, се нарича ъглова скорост на тялото в момента t, където $\vec{e}$ е единичен вектор, който лежи върху неподвижната ос. Посоката на вектора ъглова скорост $\vec{\omega}$ се определя по правилото на дясната ръка (векторът е посока на палеца на дясната ръка, докато свитите пръсти показват посоката на въртене на ИТТ).

$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$, измерва се в rad/s или s^{-1}. Връзката между големината на ъгловата скорост и броя обороти за минута е: $\omega = \frac{\pi n}{30}$, където ω $[s^{-1}]$, а n $[min^{-1}]$.

2.3. Ъглово ускорение

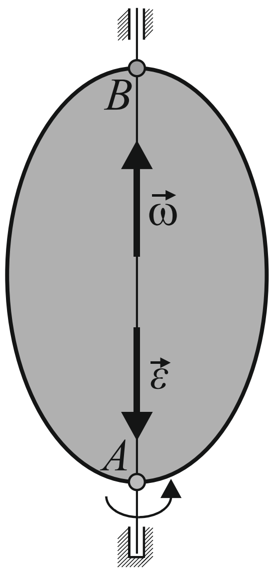
Определение – *бързината, с която се мени ъгловата скорост.*

Векторната величина, определена от отношението: $\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \overrightarrow{\varepsilon_{\text{ср.}}}$, се нарича средно ъглово ускорение на ИТТ, а границата: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{\varepsilon}$ – ъглово ускорение на ИТТ в момента t. Откъдето следва: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$. Ъгловото ускорение може да бъде: $\varepsilon > 0, \varepsilon = 0$ или $\varepsilon < 0$. Когато $\varepsilon > 0$ въртенето е ускорително, когато $\varepsilon < 0$ въртенето е закъснително, а когато $\varepsilon = 0$, ъгловата скорост е постоянна.



$\varepsilon > 0$

Фиг. 8а



$\varepsilon < 0$

Фиг. 8б

<u>Задача 7</u>. Тяло се върти около неподвижна ос по закона $\varphi(t) = 4\pi t^3$. Колко оборота е направило тялото до края на третата секунда.

Решение:

Връзката между закона на въртене на ИТТ и броя обороти е: $n = \frac{\varphi(t)}{2\pi}$.

За конкретната задача се получава: $n = \frac{4\pi t^3}{2\pi} \rightarrow \frac{4\pi.3^3}{2\pi} = 54$ оборота.

<u>Задача 8</u>. Тяло започва да се върти около неподвижна ос с ъглово ускорение $\varepsilon(t) = 4\pi t$, като началната ъглова скорост е $\omega_0 = 2\pi, s^{-1}$. Колко оборота е направило тялото до края на втората секунда.

Решение:

Използва се формулата $n = \frac{\varphi(t)}{2\pi}$. За да се намери закона на въртене на ИТТ, трябва да се интегрира двукратно, като се използват началните условия: $\varphi(0) = 0\,rad$ и $\omega_0 = 2\pi, s^{-1}$.

Първо се намира закона, по който се изменя ъгловата скорост, от зависимостта:

$\omega(t) = \int \varepsilon(t)dt$. След заместване се получава: $\omega(t) = \int 4\pi t dt = 2\pi t^2 + C_1$. За да се намери константата C_1 , се използва началното условие $\omega_0 = 2\pi, s^{-1}$, като се получава:

$\omega(0) = 2\pi;$

$\omega(0) = 2\pi 0^2 + C_1$, откъдето за C_1 се получава: $C_1 = 2\pi$ или за ъгловата скорост се получава: $\omega(t) = 2\pi t^2 + 2\pi$.

Законът на въртене се получава след като се интегрира полученият израз за ъгловата скорост: $\varphi(t) = \int \omega(t)dt$. След заместване се получава:

$\varphi(t) = \int(2\pi t^2 + 2\pi)dt = \frac{2\pi t^3}{3} + 2\pi t + C_2$, константата C_2 се намира след използване на началното условие: $\varphi(0) = 0\,rad$.

$\varphi(0) = 0;$

$\varphi(0) = \frac{2\pi.0^3}{3} + 2\pi.0 + C_2$, откъдето за C_2 се получава: $C_2 = 0$. Законът за движение се описва чрез следния израз: $\varphi(t) = \frac{2\pi t^3}{3} + 2\pi t = 2\pi t.\left(\frac{t^2}{3} + 1\right)$.

Броят на оборотите е: $n = \frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{2\pi t.\left(\frac{t^2}{3}+1\right)}{2\pi} = t.\left(\frac{t^2}{3}+1\right)$. Като се замести $t = 2, s$ се получава: $n = 2.\left(\frac{2^2}{3}+1\right) = \frac{2.7}{3} = 4{,}67$ оборота.

<u>Задача 9</u>. Тяло се върти около неподвижна ос по закона $\varphi(t) = 4\pi t^3$. Да се намери големината на ъгловото ускорение в края на петата секунда.

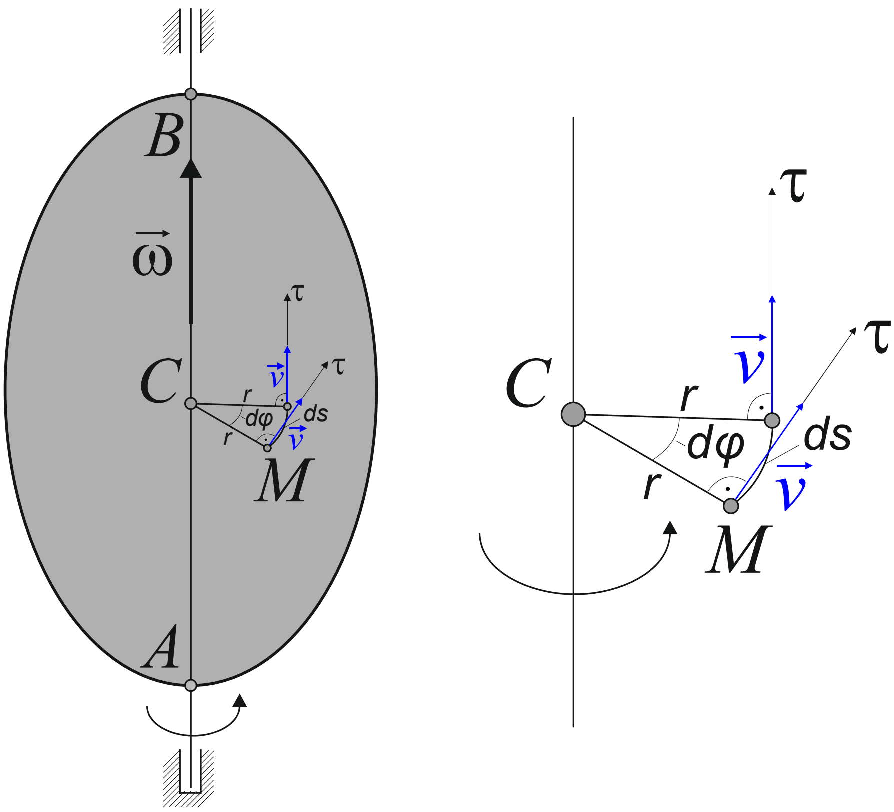
Решение:

Големината на ъгловото ускорение е втора производна на закона за въртене: $\varepsilon(t) = \ddot{\varphi}(t)$. След двукратно диференциране се получава: $\dot{\varphi}(t) = 12\pi t^2 \ \rightarrow \ \ddot{\varphi}(t) = 24\pi t$.

$\varepsilon(t) = 24\pi t \ \rightarrow \ \varepsilon(2) = 24\pi.2 = 48\pi, s^{-2}$.

2.4. Скорост на точка от ИТТ, въртящо се около неподвижна ос

Точка M от ИТТ, което се върти с ъглова скорост ω лежи на разстояние r от неподвижната ос AB. Траекторията, която описва точката, е дъга от окръжност с радиус r и център точка от неподвижната ос AB. За много малко време dt ИТТ се завърта на ъгъл $d\varphi$, като дължината на дъгата, която описва точката, е $ds = d\varphi.r$.

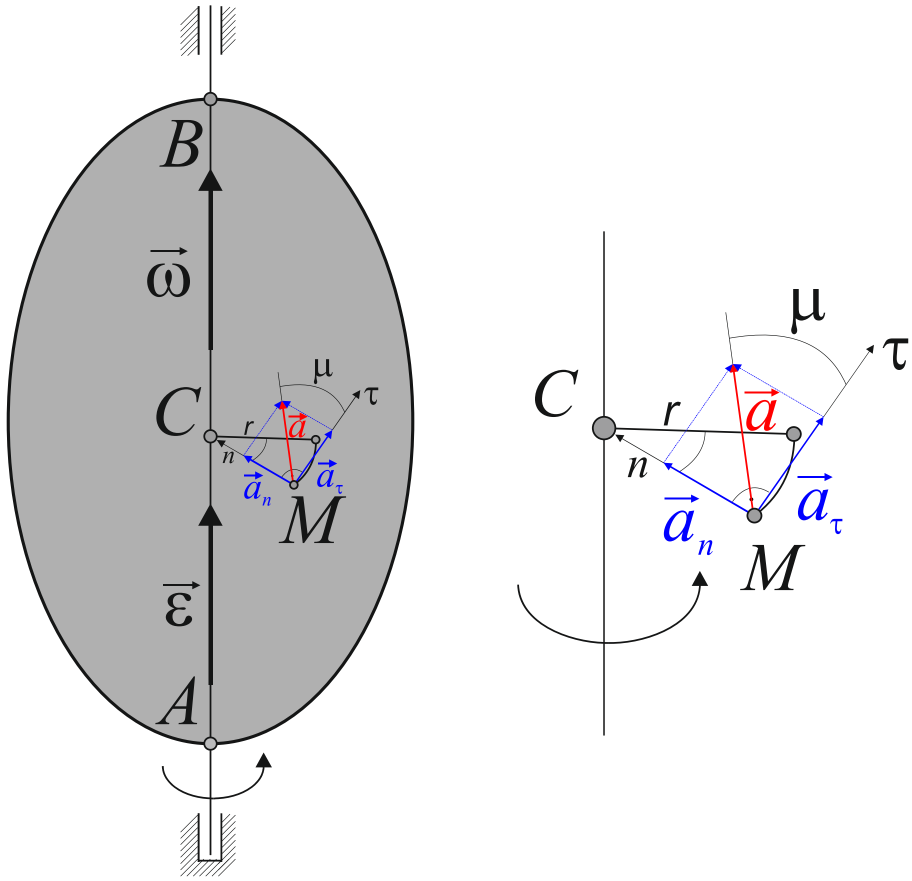


Фиг. 9

Големината на скоростта на точка M е равна на: $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega$. Следователно големините на всички точки от ИТТ, което се върти около неподвижна ос, са пропорционални на разстоянието от тях до оста на въртене.

2.5. Ускорение на точка от ИТТ, въртящо се около неподвижна ос

Ускорението на т. M се разлага на тангенциално $\overrightarrow{a_\tau}$ и нормално $\overrightarrow{a_n}$ ускорение. Пълното ускорение е векторна сума от двете му компоненти: $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$.



Фиг. 10

За големината на тангенциалното ускорение се получава: $a_\tau = \dot{v} = r\dot{\omega} = r\varepsilon$, а за нормалното ускорение се получава: $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$.

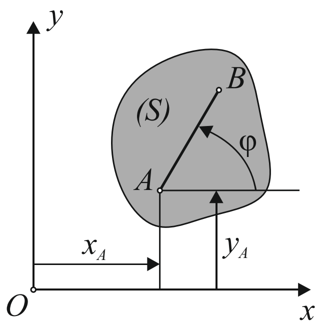
Големината на ускорението $\vec{a}$ е: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, а направлението му се определя от ъгъл $\mu = arctg\frac{a_n}{a_\tau} = arctg\frac{\omega^2}{\varepsilon}$.

§3. Равнинно движение

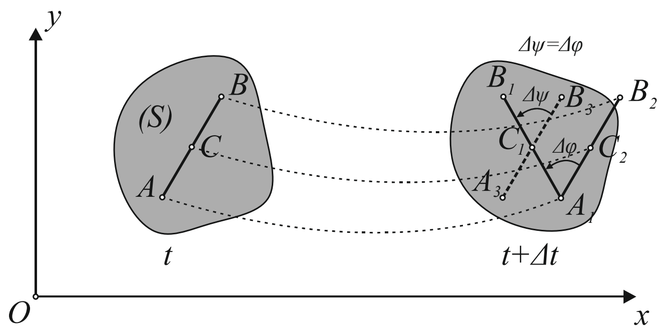
3.1.Определение – *движение, при което всички точки от ИТТ се преместват успоредно на една неподвижна равнина.*

3.2. Закон за движение, ъглова скорост и ъглово ускорение при равнинно движение

Всички точки на една права, перпендикулярна на една равнина α, имат едни и същи траектории, скорости и ускорения. Тогава движението на ИТТ може да се определи еднозначно от движението на едно негово сечение S с равнина $\alpha' \parallel \alpha$.



Фиг. 11а



Фиг. 11б

Положението на равнинното сечение S се определя еднозначно в равнината xy от отсечката AB. Точка A се нарича полюс, като нейните координати са известни: x_A и y_A, както и ъгъла φ *(фиг 11а)*. От това може да се намери положението на всяка произволна точка от сечението.

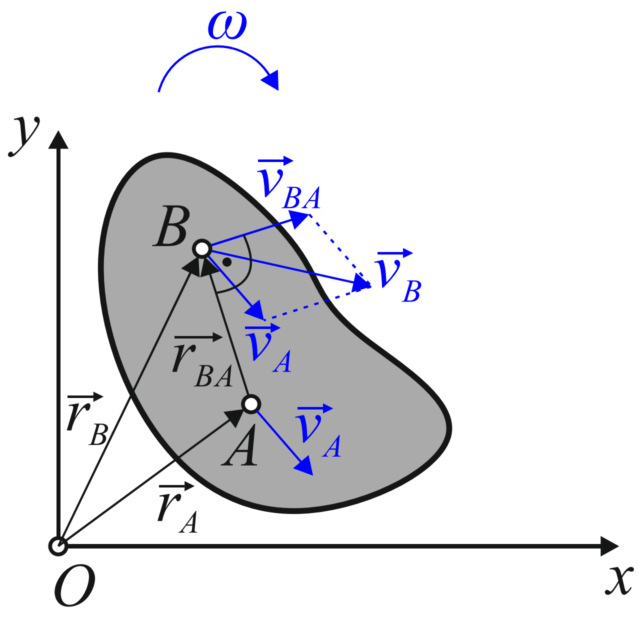
Следователно зависимостите: $x_A = x_A(t)$; $y_A = y_A(t)$; $\varphi = \varphi(t)$ се наричат закон за движение на равнинно сечение S, като полюсът A е произволна точка.

За безкрайно малко време равнинното движение може да се представи като суперпозиция от транслация и ротация около произволно избран полюс. На *фиг. 11б* се вижда, че за произволно избран полюс т. С, ъгълът, на който се е завъртяло сечението от ИТТ, е един и същ (Δφ=Δψ), докато скоростта и ускорението на точката ще са различни за всички точки в дадения момент.

При равнинно движение зависимостите за ъгловата скорост $\vec{\omega}$ и ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}$ са аналогични както при въртене на тяло около неподвижна ос: $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon$, като векторите $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ са перпендикулярни на неподвижната равнина. Ротационната част от равнинното движение не зависи от избора на полюс, т.е. $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ са едни и същи за всички точки от тялото.

3.3. Скорост на точка при равнинно движение

За да се намери скоростта на произволно избрана т. В, се избира т. А, за която е известен закона на движение (избираме я за полюс). Векторът $\overrightarrow{r_{BA}}$ определя положението на т .В спрямо полюса т. А, като законът на движение на т. В е: $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{BA}}$. Като се диференцира израза спрямо времето t , за скоростта на т. В се получава: $\overrightarrow{v_B} = \dot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{r_A}} + \dot{\overrightarrow{r_{BA}}} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_{BA}}$, където $\overrightarrow{v_A}$ е скоростта на полюса, а $\overrightarrow{v_{BA}}$ е скоростта на т. В от въртенето ѝ около т. А. Големината на въртеливата скорост $\overrightarrow{v_{BA}}$ се получава след диференциране на $\overrightarrow{r_{BA}}$ спрямо времето t: $\dot{\overrightarrow{r_{BA}}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{BA}}$ или за скоростта се получава: $\overrightarrow{v_{BA}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$. От векторното произведение се вижда, че посоката на вектора скорост $\overrightarrow{v_{BA}}$ е перпендикулярна на отсечката, свързваща т. А и т. В ($\overrightarrow{v_{BA}} \perp \overline{AB}$), като посоката на вектора скорост винаги следва посоката на въртене на тялото спрямо полюса. Големината на въртеливата скорост е $v_{BA} = \omega.\overline{AB}$.



Фиг. 12

3.4. Моментен център на скоростите (МЦС)

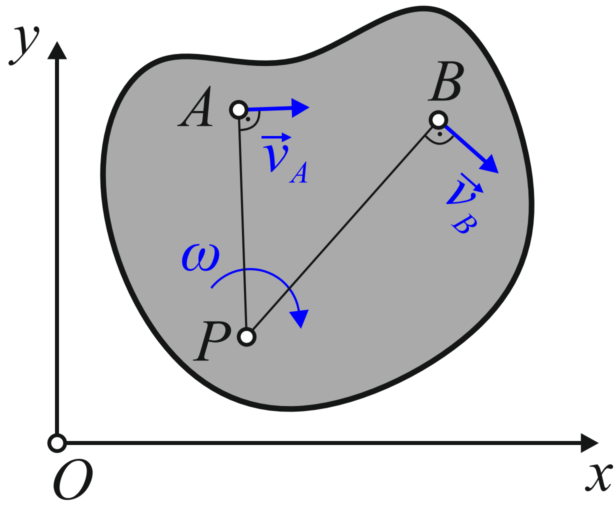
Определение – *МЦС е точка от равнината на движеща се равнинна фигура, скоростта на която в даден момент от време има големина, равна на нула, $v_P = 0$. Тази точка се бележи с P и е единствена.*

Доказателство:

Скоростта на две точки А и В, изразена чрез скоростта на полюса (т. Р), е:

$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_P} + \overrightarrow{v_{AP}} = \overrightarrow{v_{AP}}$, $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_P} + \overrightarrow{v_{BP}} = \overrightarrow{v_{BP}}$, като $\overrightarrow{v_A} \perp \overline{AP}$ и $\overrightarrow{v_B} \perp \overline{BP}$

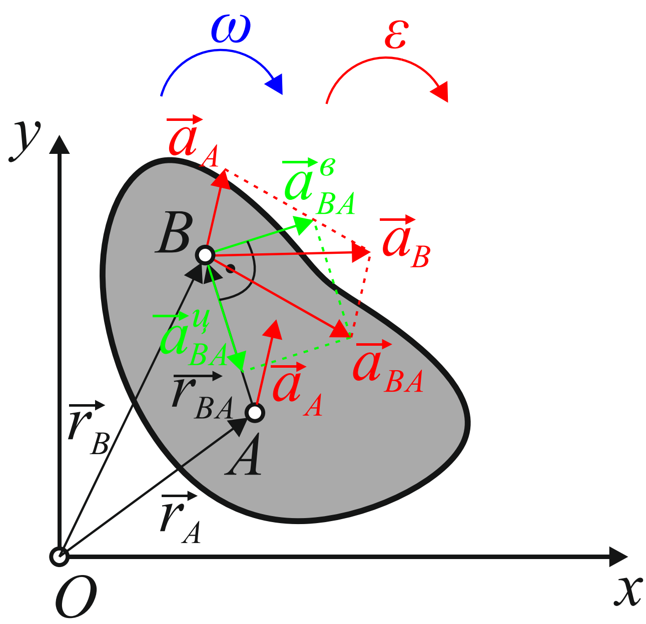
Във всеки момент от движението на равнинната фигура съществува точка, чиято големина е равна на нула. Ако се допусне, че $v_P \neq 0$, то $\overrightarrow{v_P}$ трябва да е едновременно $\perp$ на $\overline{AP}$ и $\overline{BP}$, което е невъзможно, тъй като $\overline{AP}$ не е успоредна на $\overline{BP}$. Следователно $v_P = 0$. При ъглова скорост на равнинната фигура равна на ω, за скоростите v_A и v_B се получава: $v_A = \omega.\overline{AP}$ и $v_B = \omega.\overline{BP}$.



Фиг. 13

3.3. Ускорение на точка при равнинно движение

Избира се т. A за полюс и след двукратно диференциране спрямо времето t за ускорението на т. B се получава: $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{BA}} \rightarrow \overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_{BA}}$, $\dot{\overrightarrow{v_B}} = \dot{\overrightarrow{v_A}} + \dot{\overrightarrow{v_{BA}}} = \dot{\overrightarrow{v_A}} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{BA}})$, където $\overrightarrow{a_A} = \dot{\overrightarrow{v_A}}$, а $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{BA}}) = \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_{BA}} + \vec{\omega} \times \dot{\overrightarrow{r_{BA}}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_{BA}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{BA}}$

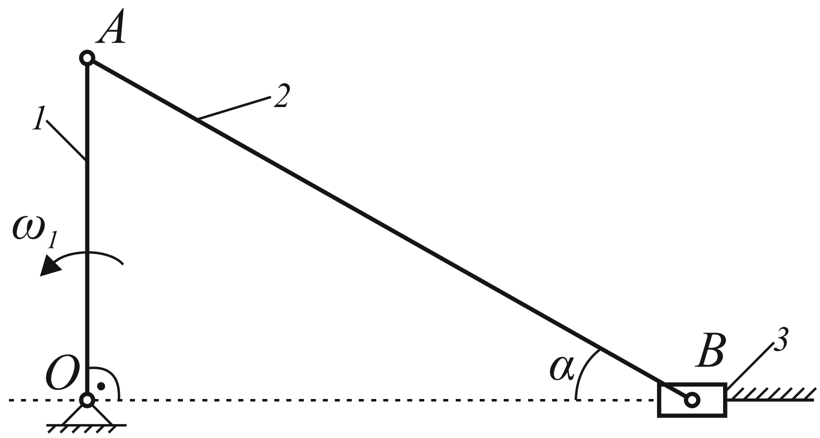


Фиг. 14

Векторното произведение $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_{BA}} = \overrightarrow{a_{BA}^{\text{в}}}$ се нарича въртеливо ускорение и е перпендикулярно на отсечката $\overline{AB}$. Големината му е: $a_{BA}^{\text{в}} = \varepsilon.\overline{AB}$. Двойното векторно произведение $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{BA}} = -\omega^2.\overrightarrow{r_{BA}} = \overrightarrow{a_{BA}^{\text{ц}}}$ се нарича центростремително ускорение и е насочено по правата $\overline{AB}$ от т. B към т. A. Големината му е: $a_{BA}^{\text{ц}} = \omega^2.\overline{AB}$. За ускорението на т. B се получава: $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{в}}} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{ц}}}$.

Ако ускоренията $\overrightarrow{a_B}$ и $\overrightarrow{a_A}$ се разложат на тангенциалната и нормалната си компоненти се получава: $\overrightarrow{a_B^{\tau}} + \overrightarrow{a_B^{n}} = \overrightarrow{a_A^{\tau}} + \overrightarrow{a_A^{n}} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{в}}} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{ц}}}$.

<u>Задача 10</u>. За даденото положение на показания на схемата механизъм да се намери ъгловото ускорение ε_2 на мотовилката 2, ако: $\overline{OA} = r,\ \overline{AB} = l,\ \omega_1 = \omega = const$.

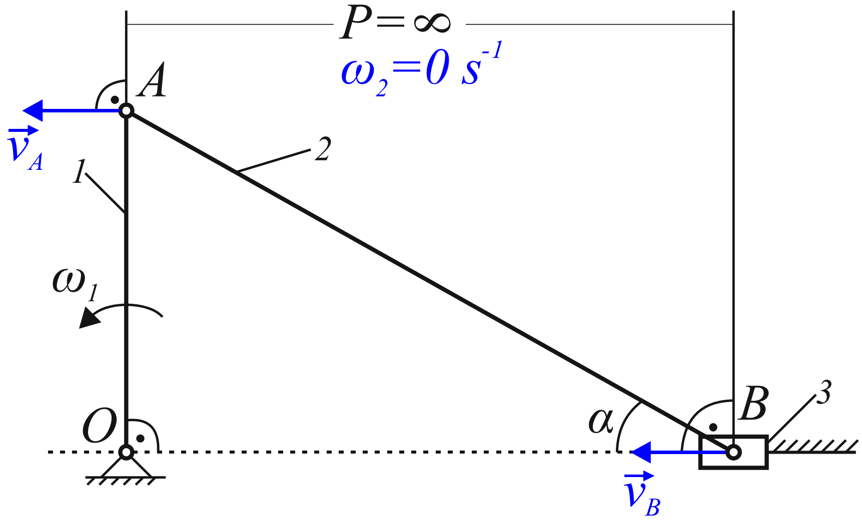


Фиг. 310

Решение:

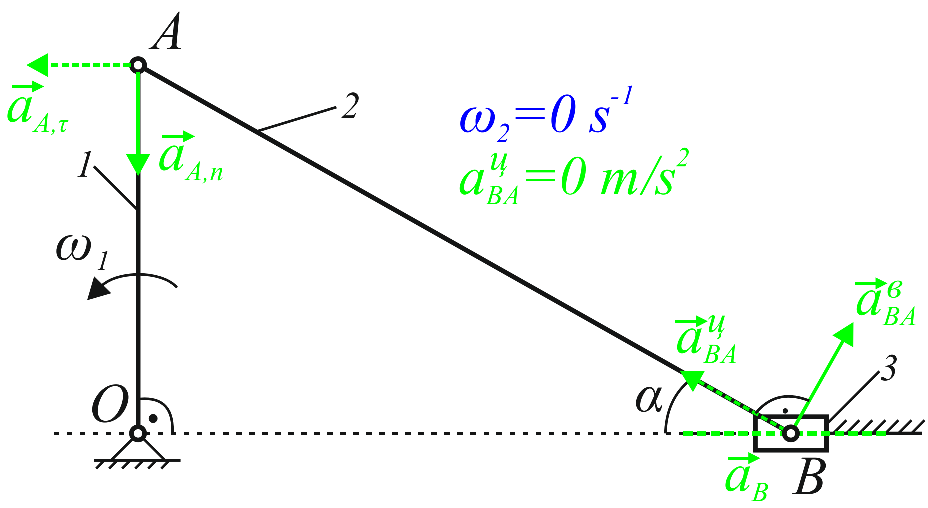
За да се намери ъгловото ускорение на мотовилката 2, трябва да се намери въртеливото ускорение на някоя точка от нея. От показаното на схемата положение е видно, че т. A (обща за коляното 1 и мотовилката 2) може да се избере за полюс, тъй като скоростта и ускорението в т. A спрямо коляното 1 са: $v_A = \omega.r$ и $\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_{A,\tau}} + \overrightarrow{a_{A,n}}$, където $a_{A,\tau} = \dot{v}_A = 0\ m/s^2$, понеже скоростта на т. A е константна. За нормалното ускорение в т. A се получава: $a_{A,n} = \omega^2.r$. След като е определено ускорението в т. A, за да се намери търсеното ъглово ускорение на мотовилката, трябва да се намери въртеливото ускорение на т. B, което е равно на: $a_{BA}^{\text{в}} = \varepsilon_2.\overline{AB}$. Въртеливото ускорение участва в израза за ускорението на т. B: $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{в}}} + \overrightarrow{a_{BA}^{\text{ц}}}$. За да намери големината на въртеливото ускорение $a_{BA}^{\text{в}}$, първо трябва да се намерят големините на $a_{BA}^{\text{ц}}$ и a_B.

Центростремителното ускорение е равно на: $a_{BA}^{ц} = \omega_2^2.\overline{AB}$. Големината на ъгловата скорост на мотовилката се намира от определението за МЦС.



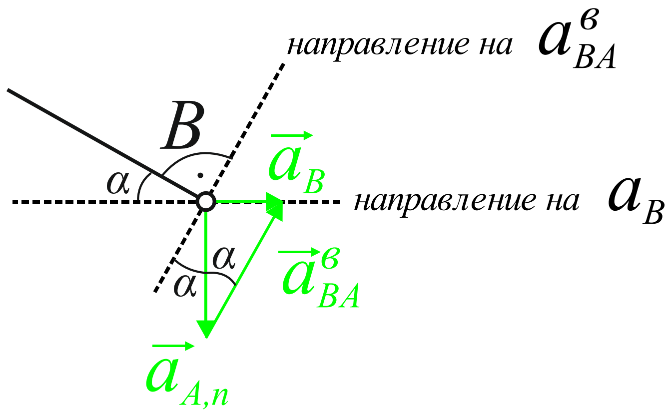
Фиг. 310а

За даденото положение на механизма скоростите в т. А и т. В са успоредни $\overrightarrow{v_A} \parallel \overrightarrow{v_B}$, а $\overrightarrow{v_A} \perp \overline{PA}$ и $\overrightarrow{v_B} \perp \overline{PB}$, т.е. т. Р лежи в безкрайността, което показва, че мотовилката извършва моментна транслация, или $\omega_2 = 0, s^{-1}$. За големината на центростремителното ускорение се получава: $a_{BA}^{ц} = \omega_2^2.\overline{AB} = 0\ m/s^2$.



Фиг. 310б

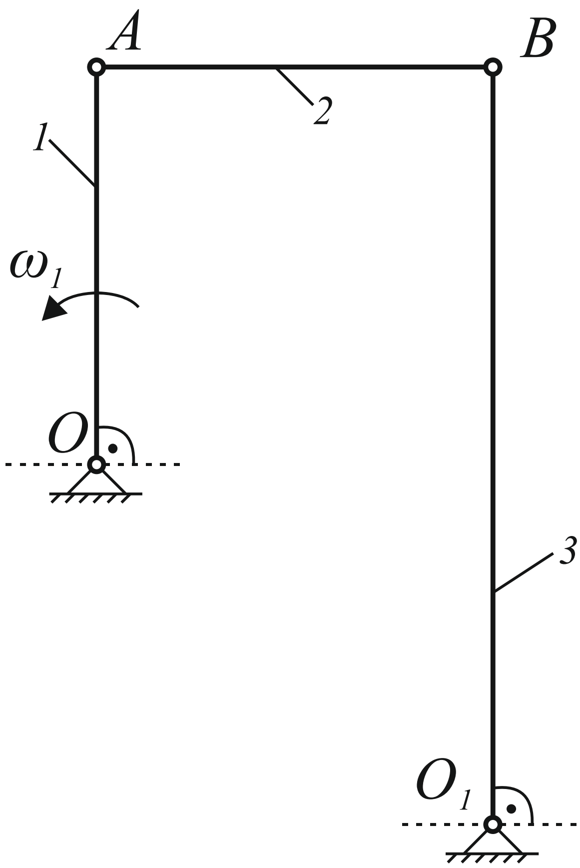
Ускорението в т. В и въртеливото ускорение на т. В спрямо полюса А могат да се намерят графично след като се знаят направленията им. От графичното решение за големината на въртеливото ускорение на т. В се получава: $a_{BA}^{в} = \tan\alpha\,.\,a_{A,n} = \omega^2.r.\tan\alpha$.



Фиг. 310в

Големината на ъгловото ускорение на мотовилката 2 е равна на: $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{ц}}{\overline{AB}} = \frac{\omega^2 . r . \tan\alpha}{l}, s^{-2}$.

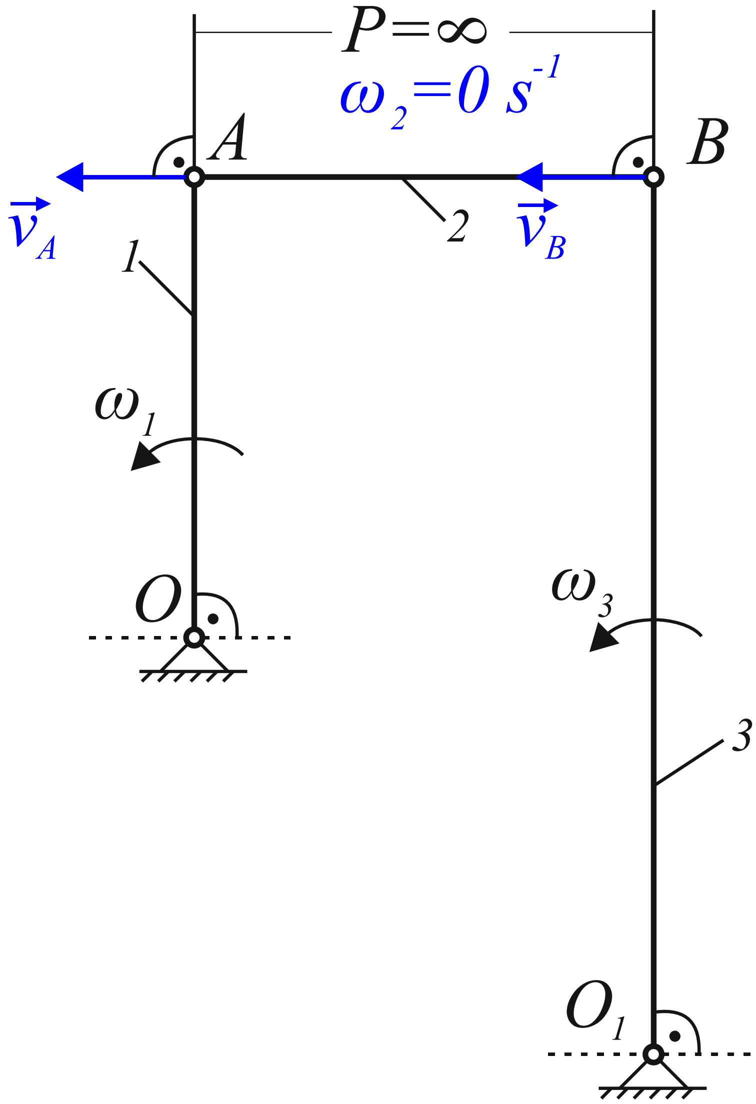
<u>Задача 11</u>. За показаното на схемата положение на механизма, да се намери ъгловата скорост ω_3 на звено 3, ако: $\overline{OA} = r,\ \overline{AB} = l,\ \overline{O_1B} = 2r, \omega_1 = 2\pi$.



Фиг. 311

Решение:

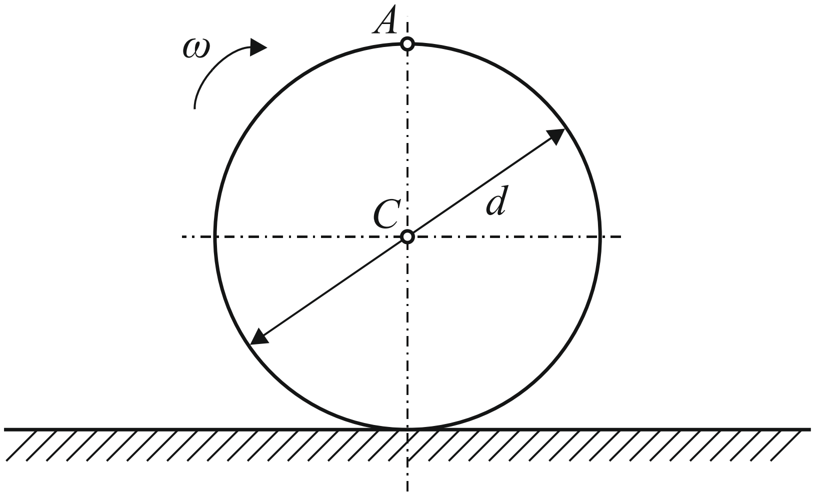
Намира се скоростта на т. А: $v_A = \omega_1.r$. Звено 2 извършва равнинно движение, като за полюс се избира т. А. От положението на механизма следва, че скоростта в т. В е перпендикулярна на отсечката $\overline{O_1B}$, следователно е успоредна на скоростта на полюса, т.е. извършва моментна транслация. Ъгловата скорост на звена 2 в дадения момент е равна на нула.



Фиг. 311а

След като звено 2 извършва моментна транслация, за скоростите следва: $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B}$. Големината на скоростта на т. В е: $v_B = \omega_1.r$, но също е равна и на: $v_B = \omega_3.2r$ или за големината на ω_3 се получава: $\omega_3 = \frac{v_B}{2r} = \frac{\omega_1.r}{2r} = \frac{2\pi}{2} = \pi, s^{-1}$.

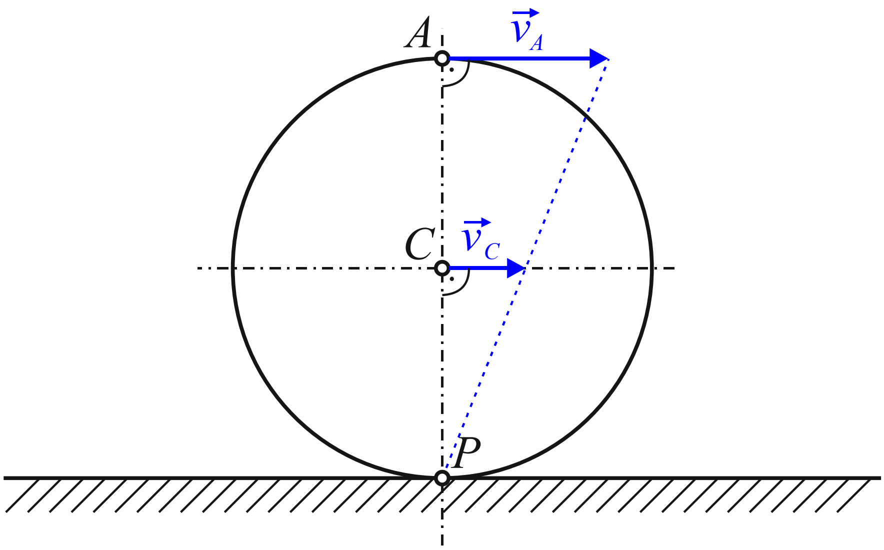
<u>Задача 12</u>. Диск с диаметър $d = 1\ m$ извършва чисто търкаляне с ъглова скорост $\omega = 2\ s^{-1}$. Да се намери скоростта в т. С и т. А от диска.



Фиг. 312

Решение:

Използва се правилото за МЦС, в случая МЦС се явява точка от диска, която е в контакт с неподвижната повърхнина.



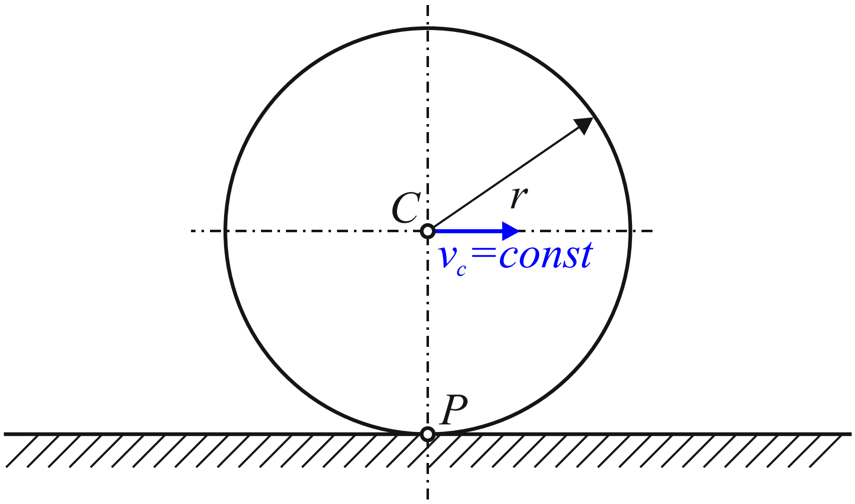
Фиг. 312а

За т. С се получава: $v_C = \omega.\frac{d}{2} = 2.\frac{1}{2} = 1\ m/s$;

За т. А се получава: $v_A = \omega.d = 2.1 = 2\ m/s$.

Извод: големината на скоростта се увеличава линейно с отдалечаване на точката от МЦС.

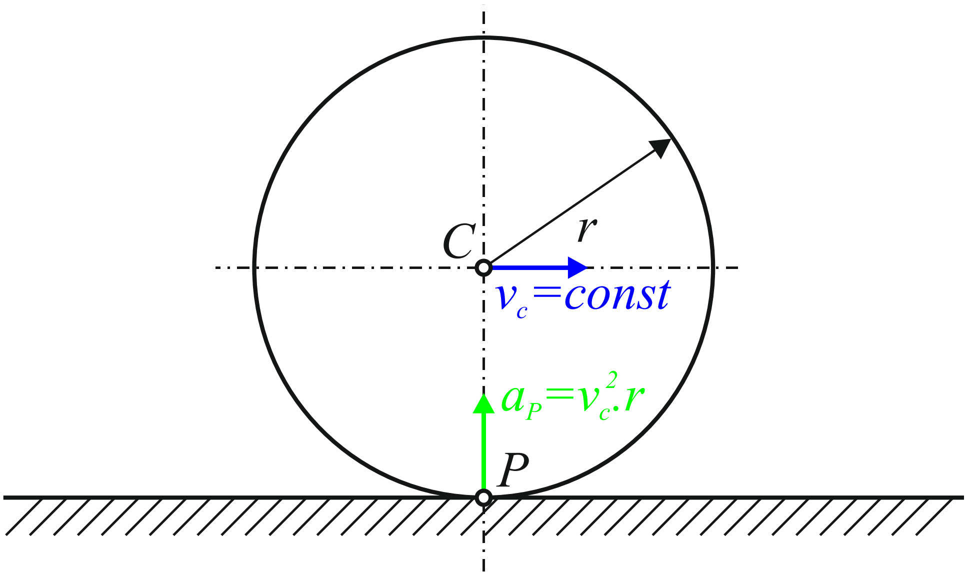
Задача 13. Диск с радиус r извършва чисто търкаляне. Ако скоростта в центъра на диска е константна, да се намери ускорението в МЦС.



Фиг. 313

Решение:

Дискът извършва равнинно движение с МЦС т. P. Съставя се векторно уравнение за ускорението в т. P с полюс т. C: $\overrightarrow{a_P} = \overrightarrow{a_C} + \overrightarrow{a_{PC}^{в}} + \overrightarrow{a_{PC}^{ц}}$.



Фиг. 313а

Големината на ускорението в полюса т. C е: $a_C = \dot{v_C} = 0\ m/s^2$;

За големината на центростремителното ускорение се получава: $a_{PC}^{ц} = \omega^2.r$, където ъгловата скорост на диска е: $\omega = \frac{v_C}{r} = const$, а големината на центростремителното ускорение, изразено чрез скоростта на т. C и радиуса на диска е: $a_{PC}^{ц} = v_C^2.r = const$;

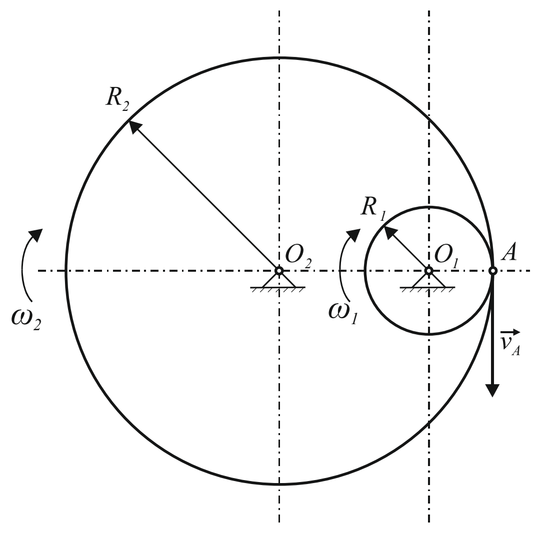
За големината на въртеливото ускорение се получава: $a_{PC}^{в} = \varepsilon.r$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 0\ s^{-1}$, тъй като $\omega = const$.

Окончателно за ускорението на МЦС се получава: $\overrightarrow{a_P} = \overrightarrow{a_{PC}^{ц}}$, $a_P = v_C^2.r = const$, т.е. когато скоростта в центъра на диска е константна, ускорението в МЦС е насочено от т. P към центъра на диска, а големината му е: $a_P = v_C^2.r = const$.

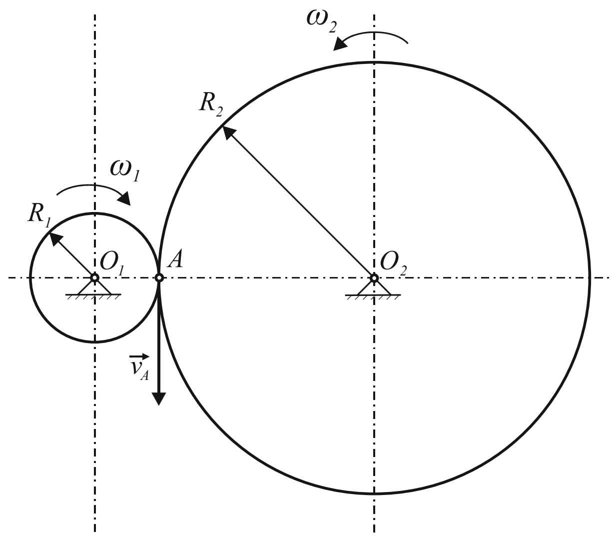
§4. Преобразуване на въртеливи движения

4.1. Преобразуване на прости въртеливи движения

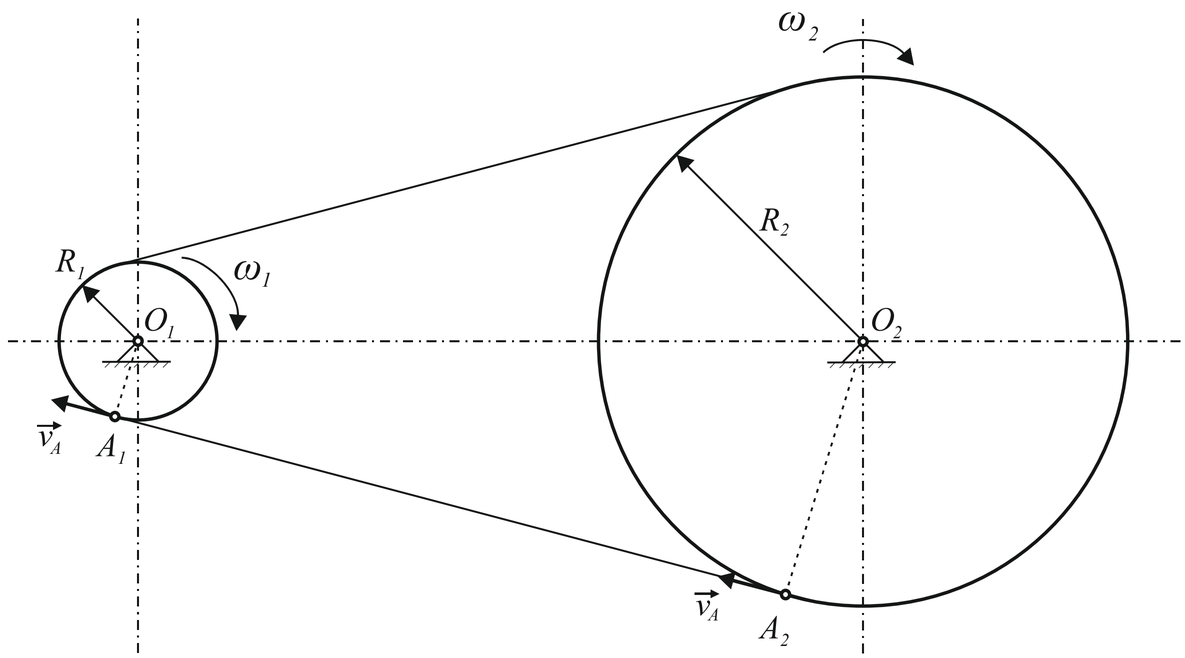
Преобразуването на въртеливи движения се извършва посредством: зъбни, фрикционни, ремъчни и верижни предавки. За тях е изпълнено условието: $v_A = \omega_1.R_1 = \omega_2.R_2$, където отношението: $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1}$, се нарича предавателно отношение. Знакът е „+“, когато ъгловите скорости са еднопосочни, и е „-“, когато ъгловите скорости са разнопосочни.



Фиг. 15а



Фиг. 15б



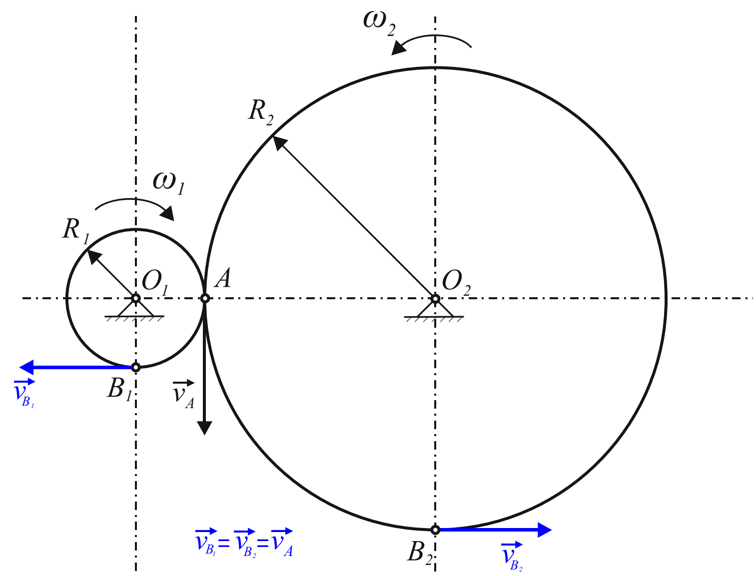
Фиг. 15в

<u>**Задача 14**</u>. Водещото колело от зацепена зъбна двойка има радиус $R_1 = 0{,}15\,m$ и ъглова скорост $\omega_1 = 6\,s^{-1}$. Предавателното отношение е $i_{1,2} = 3$. Да се намери скоростта на точка от периферията на водимото зъбно колело.

Решение:

За да се намери скоростта на периферна точка от второто зъбно колело се използва двукратно формулата: $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1}$, където за големината на ъгловата скорост на второто зъбно колело се получава: $\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{1,2}} = \frac{6}{3} = 2\,s^{-1}$, а за радиуса му се получава: $R_2 = R_1 . i_{1,2} = 0{,}15.3 = 0{,}45\,m$, големината на скоростта на периферна точка от второто зъбно колело е: $v_{2,\text{пер.}} = \omega_2 . R_2 = 2.0{,}45 = 0{,}9\,m/s$.

Извод: Скоростите на всички периферни точки от зацепената зъбна двойка имат еднакви големини.

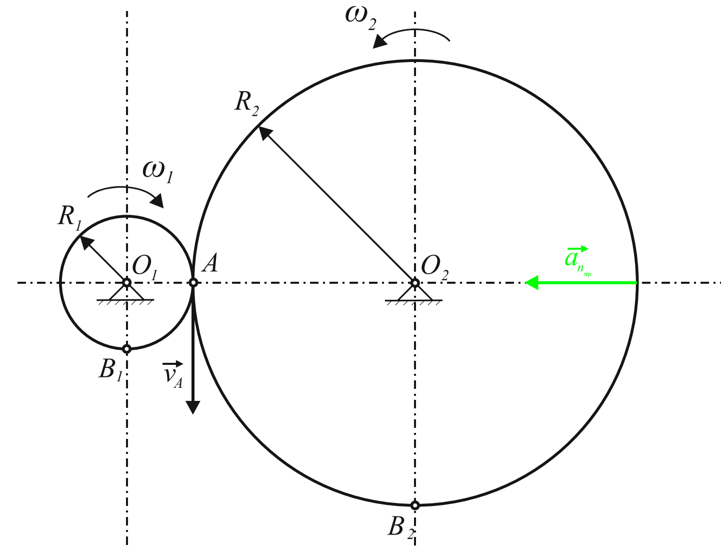


Фиг. 314

<u>Задача 15</u>. Водещото колело от зацепена зъбна двойка има ъглова скорост $\omega_1 = 4\ s^{-1}$. Предавателното отношение е $i_{1,2} = 2$, а радиусът на водимото зъбно колело е $R_2 = 0{,}2\ m$. Да се намери големината на нормалното ускорение на точка от периферията на второто зъбно колело.

Решение:

Големината на нормалното ускорение е: $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2.R$. В случая за точка от периферията на второто зъбно колело се получава: $a_{n,2} = \omega_2^2.R_2$. Единствено неизвестна остава големината на ъгловата скорост ω_2. За нея се получава: $\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{1,2}} = \frac{4}{2} = 2\ s^{-1}$. Големината на нормалното ускорение е: $a_{n,2} = \omega_2^2.R_2 = 2^2.0{,}2 = 0{,}8\ m/s^2$.



Фиг. 315

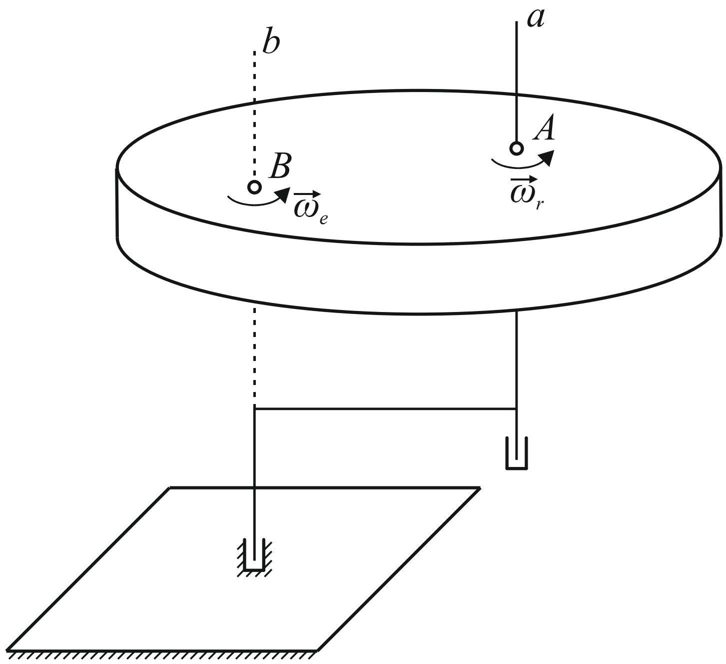
Задача 16. Водещата шайба на ремъчна предавка се върти по закона $\varphi_1(t) = 4t^2$. Предавателното отношение е $i_{1,2} = 2$, да се намери големината на ъгловото ускорение на водимата шайба.

Решение:

От $\omega = \dot{\varphi}$ и $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ следва, че: $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 8t$, а $\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{1,2}} = \frac{8t}{2} = 4t$. За големината на ъгловото ускорение на водимата шайба се получава: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 4\ s^{-2}$.

4.2. Събиране на въртения около успоредни оси

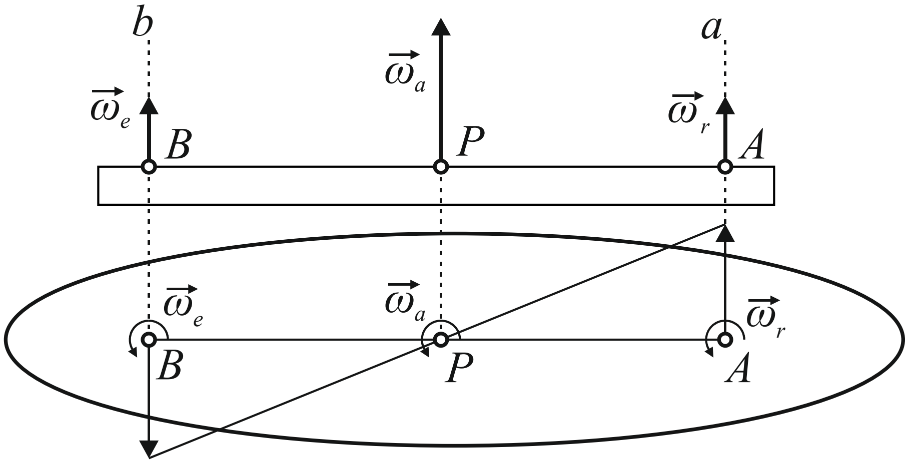
ИТТ се върти около оста си a с ъглова скорост $\overrightarrow{\omega_r}$ (релативна ъглова скорост) и същевременно се върти около неподвижната ос b с ъглова скорост $\overrightarrow{\omega_e}$ (преносна ъглова скорост). Двете оси са успоредни, като всички точки от тялото се движат в равнини, успоредни на една неподвижна ос, която е перпендикулярна на двете оси, т.е. ИТТ извършва равнинно движение.



Фиг. 16

Разглежда се едно сечение S от тялото, където ъгловите скорости $\overrightarrow{\omega_r}$ и $\overrightarrow{\omega_e}$ са еднопосочни, а т. P е МЦС. Абсолютният моментен център на въртене е т. P, като точката лежи върху отсечка, която свързва двете оси на въртене и дели дължината на отсечката в отношение, обратно пропорционално на големините на релативната и преносната ъглови скорости. За векторната сума на ъгловите скорости се получава: $v_B = \omega_r.\overline{AB}$, $v_A = \omega_e.\overline{AB}$, а ω_a е равна на:

$$\omega_a = \frac{v_B+v_A}{\overline{BP}+\overline{AP}} = \frac{v_A+v_B}{\overline{AB}} = \frac{\omega_e.\overline{AB}+\omega_r.\overline{AB}}{\overline{AB}} = \omega_e + \omega_r, \text{ или } \overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}$$



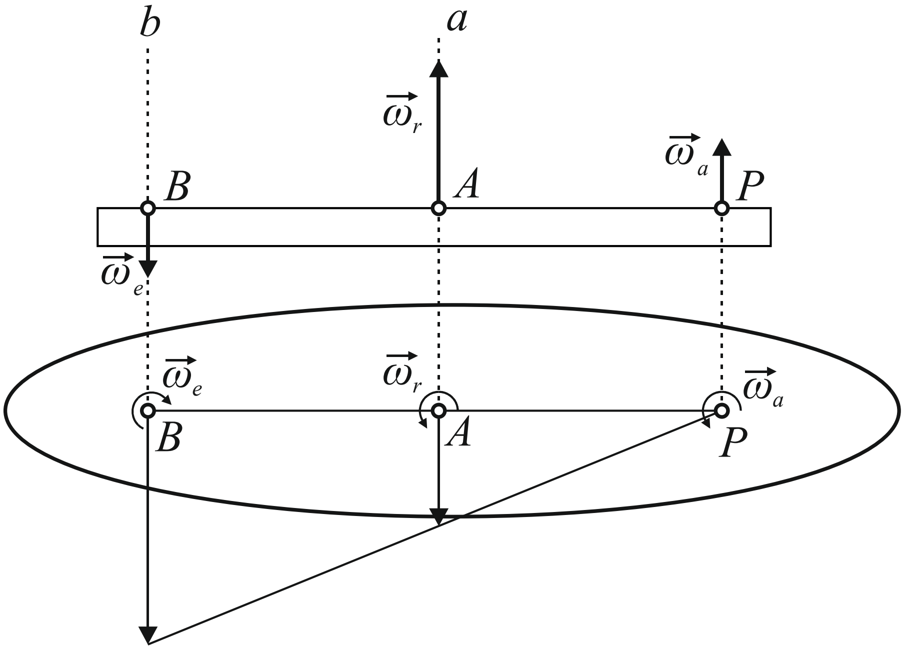
Фиг. 17

Абсолютната ъглова скорост на тялото е векторна сума от преносна и релативна ъглови скорости.

Когато преносната и релативната ъглови скорости са разнопосочни, се получава:

$v_B = \omega_r.\overline{AB}$, $v_A = \omega_e.\overline{AB}$, $\omega_a = \frac{v_B-v_A}{\overline{BP}-\overline{AP}} = \frac{v_A-v_B}{\overline{AB}} = \frac{\omega_e.\overline{AB}-\omega_r.\overline{AB}}{\overline{AB}} = \omega_e - \omega_r$, или

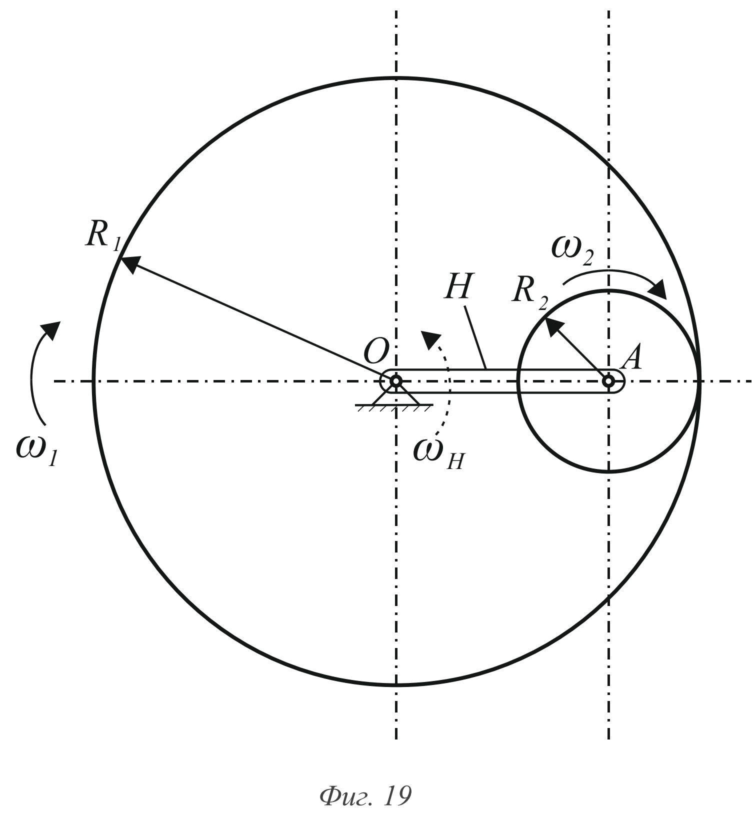
$\overrightarrow{\omega_a} = \overrightarrow{\omega_e} + \overrightarrow{\omega_r}$.



Фиг. 18

4.3. Метод на Вилис

Разглежда се диференциален зъбен механизъм, в който с H е означено звеното OA, което извършва въртене около неподвижна ос и се нарича „водило“. Звено 2 (планетно зъбно колело) извършва сума от въртения около успоредни оси с преносна ъглова скорост $\overrightarrow{\omega_e} = \overrightarrow{\omega_H}$ и релативна ъглова скорост $\overrightarrow{\omega_r}$ около собствената си ос. Звено 1 (зъбен венец) извършва въртене около неподвижна ос. Ако на целия механизъм се предаде допълнителна ъглова скорост $\vec{\omega} = -\overrightarrow{\omega_H}$, то звена 1 и 2 ще извършват въртения около неподвижни оси, тъй като водилото ще бъде неподвижно. За полученото релативно предавателно отношение $i_{1,2}^{r} = i_{1,2}^{H}$ следва: $i_{1,2}^{r} = \frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}$. От полученото отношение може да се намери коя да е от трите ъглови скорости ω_1, ω_2 и ω_H, ако са известни другите две.



Фиг. 19

<u>**Задача 16**</u>. За показания на схемата планетен механизъм да се намери ъгловата скорост на водилото H, ако $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$, $R_1 = 4R$, $R_2 = R$.

Решение:

От $i_{1,2}^{r} = \frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}$ следва: $\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega-\omega_H}{2\omega-\omega_H} = \frac{R}{4R} \rightarrow \frac{\omega-\omega_H}{2\omega-\omega_H} = \frac{1}{4} \rightarrow$

$2\omega - \omega_H = 4.(\,\omega - \omega_H) \rightarrow 2\omega - 4\omega = \omega_H - 4\omega_H \rightarrow 2\omega = 3\omega_H \rightarrow \omega_H = \frac{2}{3}\omega.$

III. Сложно движение на точка

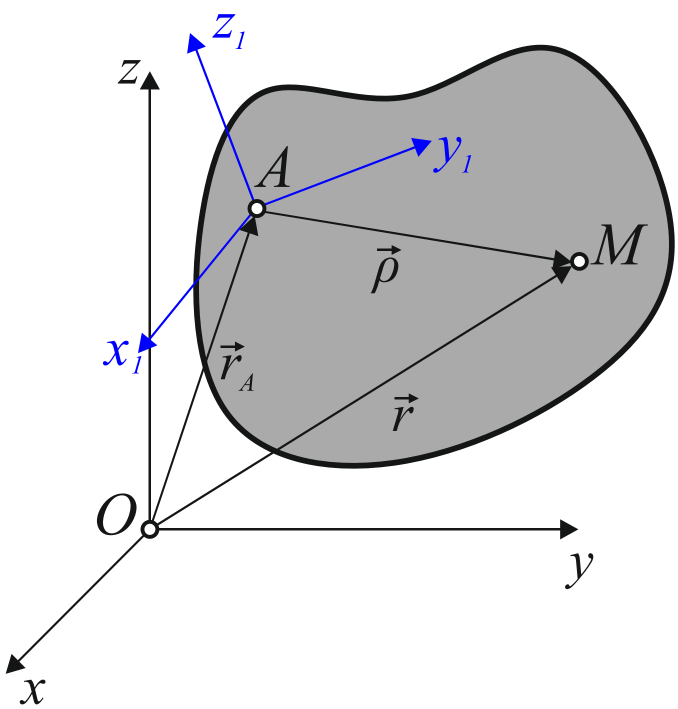
§1 . Относително, преносно и абсолютно движение

В неподвижната инерциална координатна система *Oxyz* се движи ИТТ, което е свързано с подвижната неинерциална координатна система $Ax_1y_1z_1$, като по повърхността на тялото се движи т. *M*.

Движението на т. *M* по отношение на подвижната координатна система $Ax_1y_1z_1$ се нарича относително (релативно), като скоростта и ускорението на т. *M* в координатната система $Ax_1y_1z_1$ се наричат съответно относителна скорост $\overrightarrow{v_r}$ и относително ускорение $\overrightarrow{a_r}$.

Движението на ИТТ спрямо неподвижната координатна система *Oxyz* се нарича преносно, като скоростта и ускорението на точката от тялото, където в разглеждания момент се намира т. *M* , се наричат преносна скорост $\overrightarrow{v_e}$ и преносно ускорение $\overrightarrow{a_e}$. Ъгловата скорост на тялото в случая се нарича преносна ъглова скорост $\overrightarrow{\omega_e}$.

Движението на т. *M* по отношение на неподвижната координатна система *Oxyz* се нарича абсолютно (сложно), а скоростта и ускорението на точката се наричат абсолютна скорост $\overrightarrow{v_a}$ и абсолютно ускорение $\overrightarrow{a_a}$.



Фиг. 20

§2 . Теорема за абсолютната производна на векторна функция

2.1. Теорема на Poisson

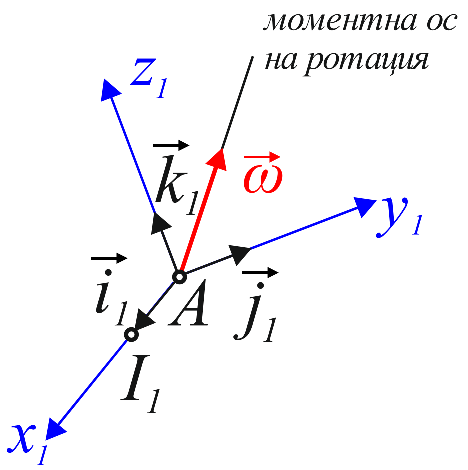
Теорема на Poisson – дадена е подвижна координатна система $Ax_1y_1z_1$, имаща ъглова скорост $\vec{\omega}$ и единични вектори $\vec{i_1}, \vec{j_1}$ и $\vec{k_1}$, съответно по осите x_1, y_1 и z_1. Производните по времето на единичните вектори са: $\dot{\vec{i_1}} = \vec{\omega} \times \vec{i_1}$; $\dot{\vec{j_1}} = \vec{\omega} \times \vec{j_1}$; $\dot{\vec{k_1}} = \vec{\omega} \times \vec{k_1}$;

Доказателство:

Ако $Ax_1y_1z_1$ извършва транслация, единичните вектори $\vec{i_1}, \vec{j_1}$ и $\vec{k_1}$ ще останат с постоянни големини, а техните производни по времето ще са равни на нула.

Движението на $Ax_1y_1z_1$ е сума от транслация + ротация около моментна ос на ротация. Всеки от единичните вектори може да се разгледа като радиус вектор на точка лежаща върху осите x_1, y_1 и z_1, която отстои на разстояние единица от координатното начало. Нека върху оста x_1 лежи т. I_1 с радиус вектор $\vec{r_{I_1}} = \vec{i_1}$, тогава за скоростта на т. I_1 във въртеливата част от движението на $Ax_1y_1z_1$ се получава: $\frac{d\vec{r_{I_1}}}{dt} = \frac{d\vec{i_1}}{dt} = \vec{v_{I_1}}$, но $\vec{v_{I_1}} = \vec{\omega} \times \vec{r_{I_1}}$, което е равно на: $\vec{\omega} \times \vec{r_{I_1}} = \vec{\omega} \times \vec{i_1} \rightarrow \frac{d\vec{i_1}}{dt} = \dot{\vec{i_1}} = \vec{\omega} \times \vec{i_1}$.

Аналогични зависимости се получават и за другите две производни на единичните вектори: $\dot{\vec{j_1}} = \vec{\omega} \times \vec{j_1}$ и $\dot{\vec{k_1}} = \vec{\omega} \times \vec{k_1}$.



Фиг. 21

2.2. Теорема за абсолютната производна на векторна функция

Дадени са векторната функция $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$, дефинирана в подвижната координатна система $Ax_1y_1z_1$, и неподвижната координатна система *Oxyz. Абсолютната векторна* *производна на $\vec{\rho}(t)$ в неподвижната координатна система Oxyz е:* $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d`\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$*,* където $\frac{d`\vec{\rho}}{dt}$ е производна на $\vec{\rho}(t)$ в подвижната координатна система, а $\vec{\omega}$ е ъгловата скорост на подвижната координатна система.

Доказателство:

Векторната функция $\vec{\rho}(t)$ се представя във вида: $\vec{\rho} = x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1 + z_1\vec{k}_1$, където x_1, y_1 и z_1 са проекциите на $\vec{\rho}$ върху осите на подвижната координатна система, а $\vec{\imath}_1$, $\vec{\jmath}_1$ и $\vec{k}_1$ са съответните единични вектори. След диференциране на $\vec{\rho}$ се получава:

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}_1\vec{\imath}_1 + \dot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + x_1\dot{\vec{\imath}}_1 + y_1\dot{\vec{\jmath}}_1 + z_1\dot{\vec{k}}_1$, първите три члена се представят като: $\dot{x}_1\vec{\imath}_1 + \dot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 = \frac{d`\vec{\rho}}{dt}$. За последните три от Теоремата на Poisson се получава:

$$x_1\dot{\vec{\imath}}_1 + y_1\dot{\vec{\jmath}}_1 + z_1\dot{\vec{k}}_1 = x_1\vec{\omega} \times \vec{\imath}_1 + y_1\vec{\omega} \times \vec{\jmath}_1 + z_1\vec{\omega} \times \vec{k}_1 = \vec{\omega} \times \left(x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1 + z_1\vec{k}_1\right) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

Следователно: $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d`\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

§3 . Теорема за събиране на скоростите

Абсолютната скорост на точка е векторна сума от преносната и релативната скорости – $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$*.*

Доказателство:

За радиус – вектора на точката в неподвижната координатна система се получава:

$\vec{r} = \overrightarrow{r_A} + \vec{\rho}$, а след като се диференцира по времето се получава: $\dot{\vec{r}} = \dot{\overrightarrow{r_A}} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \overrightarrow{v_A} + \frac{d`\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

или: $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{d`\vec{\rho}}{dt}$, но $\overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \overrightarrow{v_e}$, а $\frac{d`\vec{\rho}}{dt} = \overrightarrow{v_r}$.

Следователно: $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$.

§4 . Теорема за събиране на ускоренията (на Кориолис)

Абсолютното ускорение е векторна сума от преносно, релативно и кориолисово ускорения – $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$*.*

Доказателство:

Изразът за абсолютната скорост $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{d`\vec{\rho}}{dt}$ се диференцира: $\dot{\overrightarrow{v_a}} = \dot{\overrightarrow{v_A}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \frac{d`}{dt}\left(\frac{d`\vec{\rho}}{dt}\right) + \vec{\omega} \times \frac{d`\vec{\rho}}{dt}$, или:

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d`\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) + \frac{d`}{dt}\overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{v_r}$, след преработване се получава: $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \overrightarrow{a_r} + 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_r}$, където първите три компоненти на уравнението се явяват преносното ускорение $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, $\overrightarrow{a_r}$ е релативното ускорение, а последното векторно произведение е кориолисовото ускорение: $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_r}$.

Следователно: $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$.

По големина кориолисовото ускорение е равно на: $a_c = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}\overrightarrow{v_r})$, следователно кориолисовото ускорение е равно на нула в следните три случая:

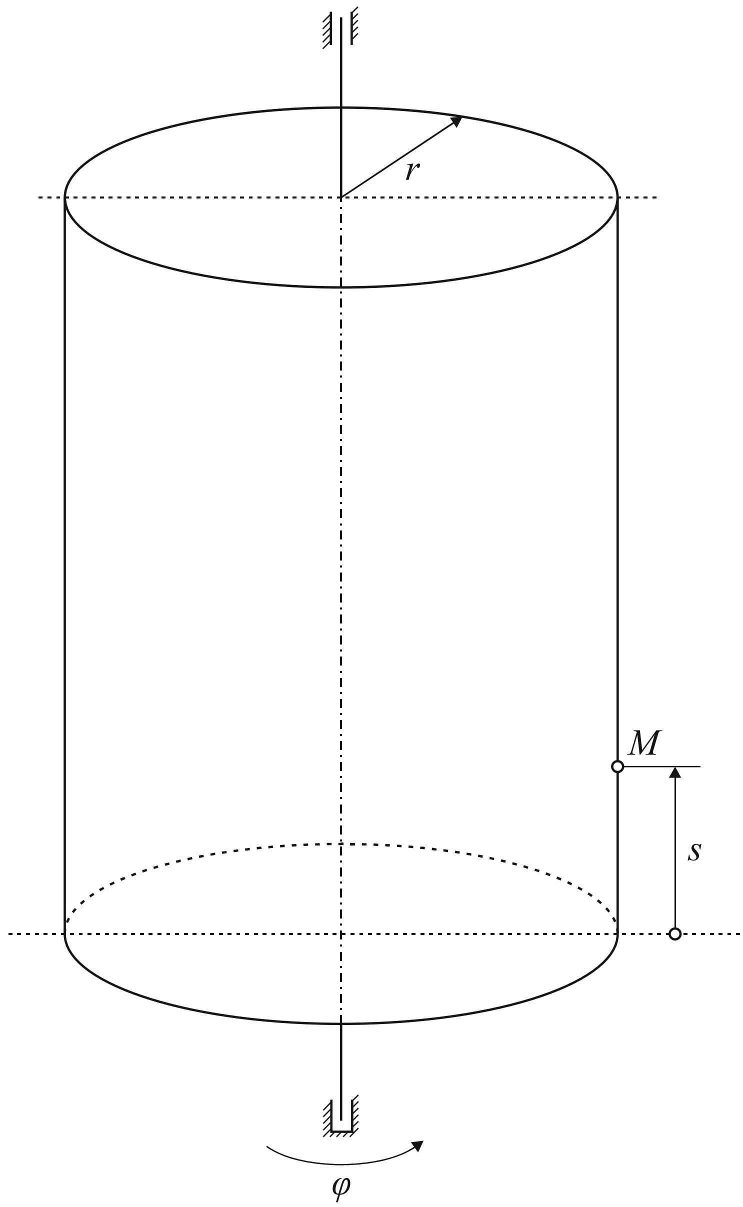
1) $\omega = 0$ – преносното движение е транслация;

2) $v_r = 0$ – големината на релативната скорост е равна на нула (т. М е в покой);

3) $\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{v_r}$ – векторите преносна ъглова скорост и релативна скорост са успоредни.

Посоката на кориолисовото ускорение се определя по правилото за векторно произведение, където $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{v_r}$ образуват равнина, спрямо която кориолисовото ускорение е перпендикулярно, а трите вектора образуват дясно ориентирана координатна система ($\vec{\omega}, \overrightarrow{v_r}$ и a_c).

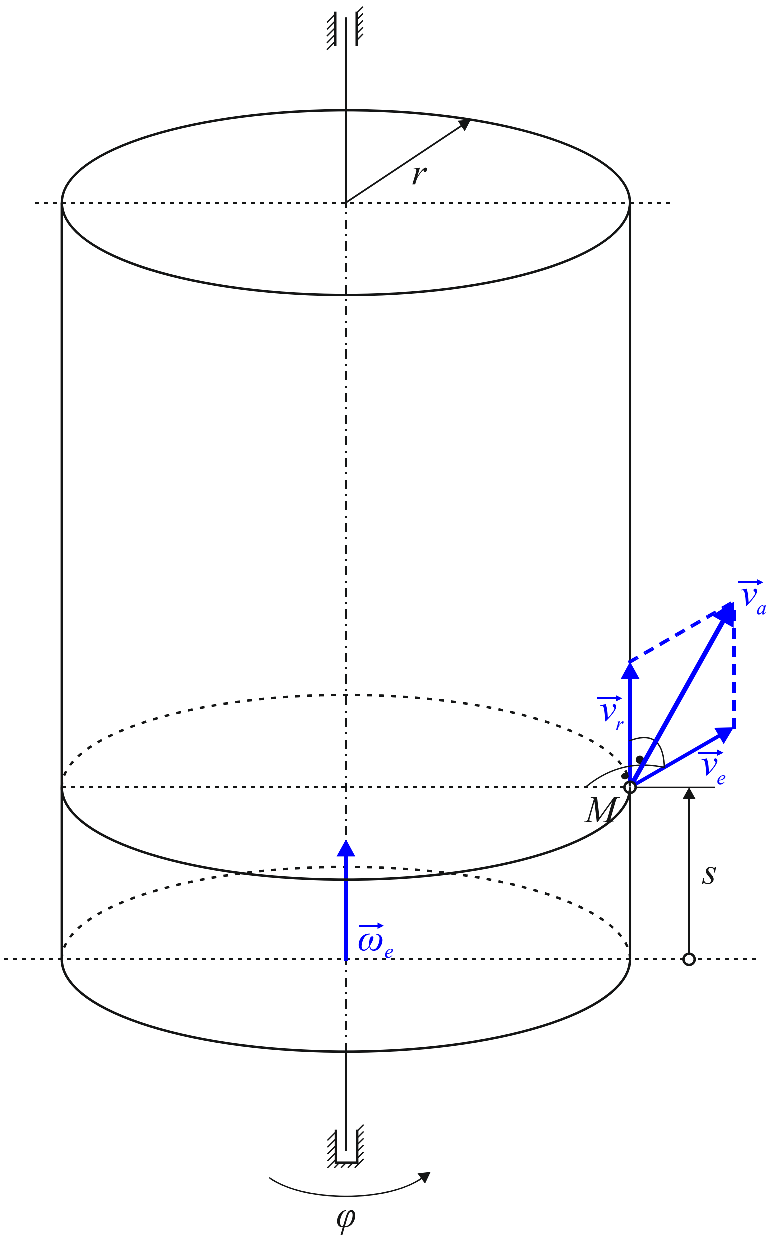
Задача 17. Прав кръгов цилиндър с радиус r се върти около оста си по закона $\varphi(t)$, с постоянна ъглова скорост $\omega_e = const$. По образуващата му се движи т. *M.* по закона $s(t)$. Да се намерят абсолютната скорост и абсолютното ускорение на точката.



Фиг. 317

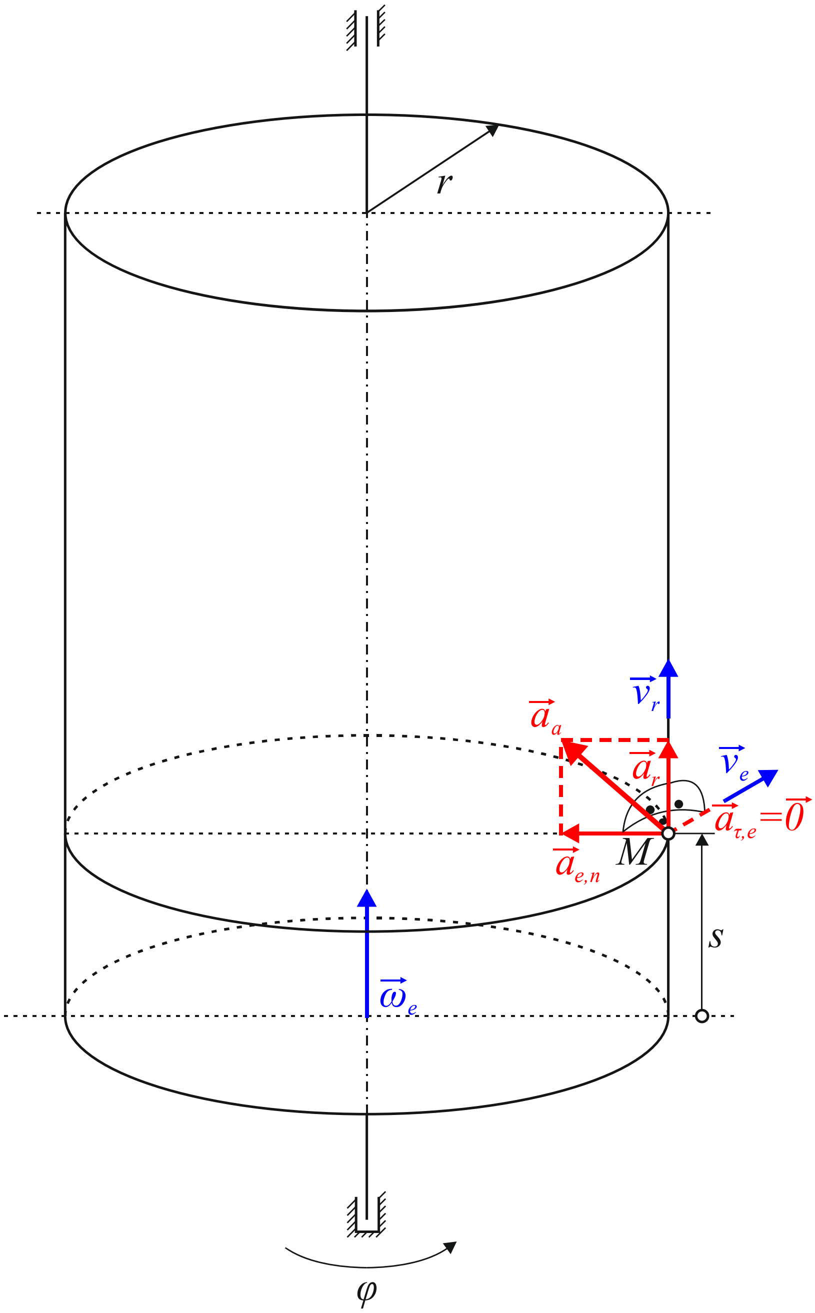
Решение:

За да се намери големината на абсолютната скорост на т. *M*, първо трябва да се намерят големините на скоростите v_r и v_e. Релативната скорост на точката се явява първа производна на закона за движение на точката - $\dot{s} = v_r$. Точката от тялото, където се намира т. *M* е точка от периферията на цилиндъра, т.е. преносната скорост е равна на скоростта на тази точка, или $v_\mathrm{e} = \omega_e . r$, където ъгловата скорост на ИТТ е първа производна на закона за движение на цилиндъра - $\omega_e = \dot{\varphi}$. Посоките на двете скорости са показани на *фиг. 317а*, като големината на абсолютната скорост на т. *M* е равна на: $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{\dot{s}^2 + (\dot{\varphi} . r)^2}$.



Фиг. 317а

За да се намери големината на абсолютното ускорение на т. *М* трябва да се намерят големините на трите му компоненти a_r, a_e и a_c. Релативното ускорение е равно на производната по времето на релативната скорост - $\ddot{s} = \dot{v}_r = a_r$. Преносното ускорение на периферната точка от ИТТ има две компоненти: $a_{e,\tau}$ и $a_{e,n}$, тангенциалната компонента е производна на преносната скорост - $a_{e,\tau} = \dot{v}_e = \dot{\omega}_e . r = 0\ m/s^2$, големината му е нула, защото ъгловата скорост е константна. За големината на нормалното преносно ускорение се получава: $a_{e,n} = \omega_e^2 . r$. Посоката му е показана на *фиг. 317б*. Големината на кориолисовото ускорение е равно на нула, защото векторите преносна ъглова скорост и релативна скорост на т. *М* са успоредни. За големината на абсолютното ускорение се получава: $a_a = \sqrt{a_r^2 + a_{e,n}^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + (\dot{\varphi}^2.r)^2}$, тъй като векторите релативно ускорение и нормално преносно ускорение са перпендикулярни.



Фиг. 317б

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beer, F.P., E. R. Jonhston Jr, D. F. Mazurek, P. J. Cornwell, Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition, 2013.

[2] Meriam, J. L., L. G. Kraige, Engineering Mechanics: Volume 2, Dynamics, seventh edition, 2012.

[3] Максимов Й. Т., Теоретична механика, ЕксПрес, Габрово, 2016.

[4] Бъчваров, С. Н., А. А. Джонджоров, Б. И. Чешанков, Н. К. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по Теоретична механика, С, 1973.