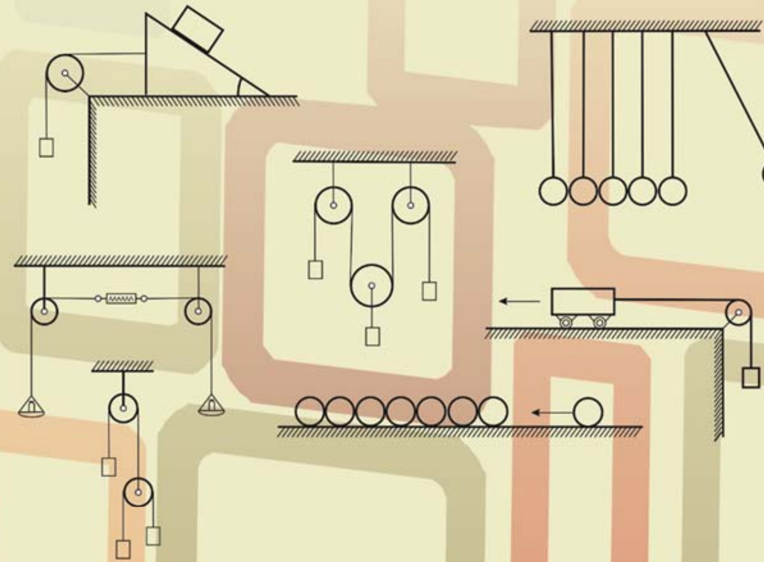
Ангел Петров Анчев

Ръководство за решаване на задачи по динамика



2021

Ангел Анчев

РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО ДИНАМИКА

Университетско издателство
„ВАСИЛ АПРИЛОВ“
ГАБРОВО
2021

Българска
Първо издание
Рецензент: проф. Йордан Тодоров Максимов дтн, ктн

ISBN 978-954-683-633-5

Съдържание

Съдържание ... 4
Увод ... 6
Гл. 1. Диференциални уравнения на движение на материална точка ... 7
  1.1. Права задача от динамика на свободна материална точка ... 7
    1.1.1. Определение ... 7
    1.1.2. Решение на права задача ... 7
    1.1.3. Решени задачи ... 7
  1.2. Обратна задача от динамика на свободна материална точка ... 9
    1.2.1. Определение ... 9
    1.2.2. Решение на обратна задача ... 9
    1.2.3. Решени задачи ... 9
  1.3. Права задача от Динамика на несвободна материална точка ... 13
    1.3.1. Определение ... 13
    1.3.2. Решение на правата задача ... 13
    1.3.3. Решени примери ... 13
  1.4. Обратна задача от Динамика на несвободна материална точка. ... 15
    1.4.1. Определение ... 15
    1.4.2. Постановка на обратната задача ... 15
    1.4.3. Решени примери ... 16
2. Общи теореми от динамика на материална точка ... 19
  2.1. Количество на движение на материална точка ... 19
    2.1.1. Определение ... 19
    2.1.2. Решени задачи ... 19
  2.2. Кинетична енергия на материална точка ... 23
    2.2.1. Определение ... 23
    2.2.2. Решени задачи ... 23
  2.3. Работа на сила ... 24
    2.3.1. Определение ... 24
    2.3.2. Решени задачи ... 27
  2.4. Мощност ... 29
    2.4.1. Определение ... 29
    2.4.2. Решени примери ... 29

3. Динамика на материална система ...31
3.1. Въведение в геометрия на масите ...31
3.1.1. Маса на материална система ...31
3.1.2. Масов осов инерционен момент ...31
3.1.3.Центробежни инерционни моменти ...31
3.1.4. Теорема на Хюйгенс ...31
3.1.5. Главни инерционни оси ...32
3.2. Теорема за изменение на кинетичната енергия на материална система 32
3.2.1. Кинетична енергия на материална система ...32
3.2.2. Кинетична енергия за различни случаи на движение на тяло ...32
3.2.3. Случаи за изчисление на работа ...33
3.2.4. Теорема за изменение на кинетичната енергия на материална система ...34
3.2.5. Решени примери ...34
4. Динамика на идеално твърдо тяло ...40
4.1. Динамика на тяло въртящо се около неподвижна ос ...40
4.1.1. Определение ...40
4.1.2. Решени примери ...40
4.2. Принцип на кинетостатиката ...43
4.2.1. Принцип на Д'Аламбер ...43
4.2.2. Уравнения на кинетостатиката ...43
Приложение ...46
Главни масови инерционни моменти на някои хомогенни линии, повърхнини и тела ...46
Литература ...50

Увод

Ръководството е предназначено за подпомагане на усвояването на учебния материал, от студентите за всички специалности от професионални направления Машинно и Общо инженерство, Материали и материалознание на ТУ-Габрово, които изучават дисциплината Механика II – раздел Динамика.

Към всеки раздел са дадени кратки теоретични постановки и решени примери, аналогични със задачите, съдържащи се в изпитните тестове и курсови работи.

Гл. 1. Диференциални уравнения на движение на материална точка

Вторият закон на механиката дава връзка между масата на материална точка, ускорението, което тя получава, силата, приложена върху точката. Този закон представлява основния закон на Динамиката:

$$m\vec{a} = \vec{P}. \tag{1}$$

Той остава в сила и тогава, когато върху точката действат n на брой сили:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P.} \tag{2}$$

Имайки предвид, че ускорението е втората производна от закона за движение на точката, зададен посредством радиус вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$, уравнение (1) получава следния вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P}. \tag{3}$$

Получената зависимост (3) се нарича диференциално уравнение на движение на материална точка във векторен вид.

Мерните единици на механичните величини, съставляващи уравнение (1), са следните: за маса на телата – килограм (kg), за дължина – метър (m), за време – секунда (s). Последните две формират единицата за ускорение - m/s^2. Единицата за сила носи името на учения систематизирал основните закони на механиката – Исак Нютон, и тя е равна на: $1N = 1kg.1m/1s^2$

1.1. Права задача от динамика на свободна материална точка

Материална точка, на чието движение не са наложени ограничения посредством връзки, се нарича свободна материална точка.

1.1.1. Определение

При известен закон за движение на материалната точка се определят действащите върху точката сили.

1.1.2. Решение на права задача

Ако е известно ускорението, посредством (1) се изчисляват неизвестните сили. При известен закон за движение - по (3).

1.1.3. Решени задачи

Пример 1.

Материална точка с маса $m = 0{,}05kg$ се движи в хоризонтална равнина с ускорение $\vec{a} = 30\vec{i} + 40\vec{j}$. На колко е равна големината на силата, приложена върху точката?

Решение:

Натурен пример представящ тази задача може да бъде движението на топче, след изстрелването му от пружина в игра тип „Speed Ball”.

Триенето между топчето и основата на играта може да се пренебрегне. Това допускане не повлиява значително на крайния резултат.

Ускорението зададено с посочните косинуси означава, че то има компоненти по две оси с големини по оста $x = 30\ m/s^2$ и по оста $y = 40\ m/s^2$. Ускорението е векторна величина, което изключва възможността да се сумират големините на двете компоненти. Определянето на големината на ускорението се извършва по правилото за събиране на векторни величини (в случая на равнина задача това е Питагоровата теорема):

$$\mathrm{a} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50\frac{m}{s^2}.$$

Следващата стъпка е да се приложи основният закон на Динамиката (1):

$$P = m.\mathrm{a} = 0{,}05.50 = 2{,}5\ N.$$

С това търсената големина на приложената сила е намерена. Условието на задачата не налага определянето на направлението и посоката на приложената върху материалната точка сила.

Пример 2.

Материална точка с маса $m = 4kg$ се движи по права линия по закона $x = 2\sin 20t$. На колко е равна максималната стойност на силата?

Решение:

Совалката на тъкачен стан реализира подобен закон за движение, като триенето между совалката и нишките на вътъка се пренебрегва.

Прилага се отново уравнение (1), като за целта е необходимо да се намери втората производна на закона на движение на материалната точка.

Първата производна на закона за движение представлява изразът за изменение на скоростта на материалната точка:

$$\dot{x} = 2\sin(20t)' = 20.2.\cos(20t) = 40.\cos(20t).$$

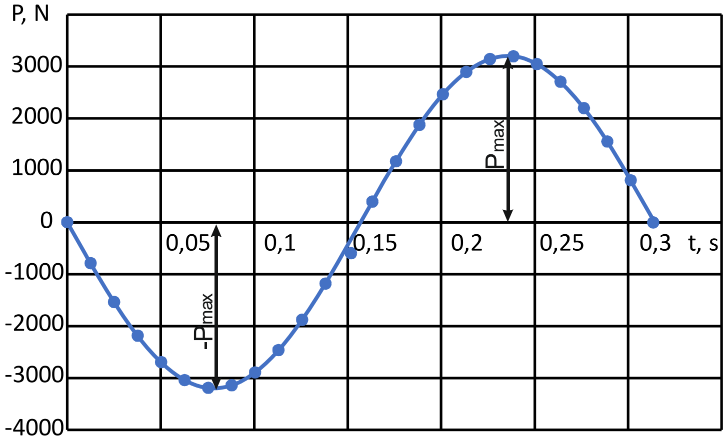
От горния израз се намира втората производна, която е ускорението на материалната точка:

$$\ddot{x} = 40.\cos(20t)' = -20.40.\sin(20t) = -800.\sin(20t).$$

Замества се в (1) и се получава изразът за изменение на големината на приложената сила:

$$P = m.\ddot{x} = 4.(-800.\sin(20t)) = -3200.\sin(20t).$$

На фиг.1. е показана графиката на получената функция в интервала 0…0,314 s. Търсената максимална стойност на силата е означена на фиг. 1 и е равна на нейната амплитуда 3200 N.



Фиг.1.Графика на функцията на изменението на приложената на материалната точка сила

1.2. Обратна задача от динамика на свободна материална точка

1.2.1. Определение

Ако знаем действащите върху точката сили, да се намери закона за движение на точката, респ. скоростта, респ. ускорението.

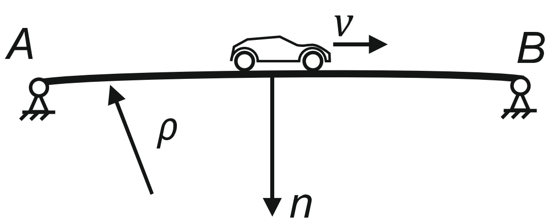
1.2.2. Решение на обратна задача

За решението на задачите се използва изразът (2), който се проектира по осите на неподвижна координатна система Oxyz. Получават се следните диференциални уравнения на движение:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix};\ m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy};\ m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}\ . \qquad (4)$$

1.2.3. Решени задачи

Пример 1.



Фиг.2.

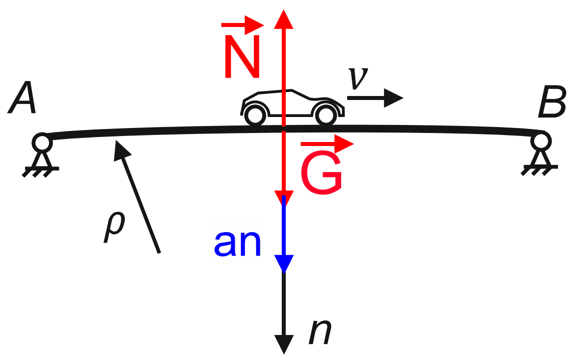
Автомобил се движи по мост с радиус на кривина $\rho = 350\ m$. Ако масата на автомобила е $m = 1200\ kg$, да се определи при каква скорост големината на нормалната реакция става равна на нула? Автомобилът се намира в най-изпъкналата точка на моста.

Решение

Причината да разглеждаме автомобила като свободна материална точка е изпълнението на условието в задачата - при какво условие нормалната реакция на автомобила става равна на нула. Това се случва в момента на загуба на контакт между автомобила и пътната настилка, т.е. да „полети“, тогава нормална реакция има големина нула.

Разглеждаме автомобила като материална точка и ще проектираме основното диференциално уравнение на движение на материална точка само по една ос, съвпадаща с направлението на действие на силата на тежестта и нормалната реакция.

Изчислителната схема е показана на фиг.3. На нея са нанесени действащата на автомобила сила на тежестта и нормално ускорение, съвпадащи като посоки с избраната посоката на координатната ос.



Фиг.3.

От курса по кинематика е известно, как се определя големината на нормалното ускорение на точка, чиято траектория е известна – в случая това е движение по дъга от окръжност с радиус $\rho = 350\,m$.

Основното уравнение (2) се проектира по *n* (нормалата):

$$ma_n = G - N. \qquad (5)$$

Нормалното ускорение е:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

$$G = mg,$$

$N = 0 -$ условие за настъпване на отделяне.

След заместване в (5), с горните изрази се получава:

$$m\frac{V^2}{\rho} = mg.$$

Оттук за търсената скорост получаваме:

$$V = \sqrt{g.\rho} = \sqrt{9{,}81.350} = 58.6\frac{m}{s}.$$

Т.е. за да настъпи отделяне на автомобила от пътната настилката, той трябва да се движи със скорост, приблизително равна на 211 km/h.

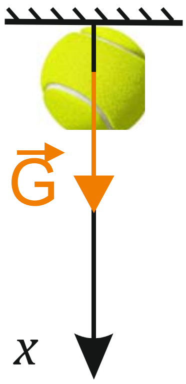
Пример 2

Топка за тенис е пусната без начална скорост от 8-ия етаж на жилищна сграда. Звукът от достигането на топката до земната повърхност е чут след $t = 2.1\ s$. Като се приеме, че скоростта на звука е $V_{зв} = 325\ m/s$, да се намери височината на сградата?

Решение

Топката е приета за свободна материална точка. Влиянието на съпротивителната сила на въздуха върху топката не се отчита при изследване на нейното движение.

Изчислителната схема е показана на фиг.4.



Фиг.4.

Съгласно втория закон на Нютон ще се реши едно диференциално уравнение на движение проектирано по ос x - $m\ddot{x} = G$. (6)

Това диференциално уравнение ще се интегрира двукратно, за да се получи закона на движение на топката, разглеждана като материална точка. Първата стъпка е определяне на началните условия. Диференциалното уравнение е от втори ред, което означава, че за неговото решаване са необходими две начални условия и те са:

- ✓ Скорост (V_0) на топката за време $t = 0$;
- ✓ Начално положение (X_0) на топката за същия момент от време $t = 0$.

От условието на задачата става ясно, че тя е пусната без начална скорост, следователно $V_0 = 0\ m/s$ и $X_0 = 0\ m$.

Заместваме силата на тежестта с $G = mg$ в (6) и след съкращаване на масата, получаваме:

$$\ddot{x} = g. \tag{7}$$

След интегриране на (7) се получава:

$$\dot{x} = g.t + C_1.$$

След последващо интегриране се получава израза на закона за движение на материална точка пусната без начална скорост:

$$x(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1.t + C_2,$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи, които числено се определят от началните условия.

Константата C_1 представлява началната скорост, следователно $C_1 = V_0 = 0$, константата C_2 представлява началното местоположение на точката, следователно $C_2 = X_0 = 0$.

В окончателен вид закона за движение на свободна материална точка добива следния вид:

$$x(t) = g\frac{t^2}{2}. \tag{8}$$

От (8) се изразява времето за което топката ще падне, като с h – височината на сградата, се замества изминатия път:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Отчетеното време в условието на задачата включва две компоненти, едната е времето за което топката пада на земната повърхност и другата компонента е времето за което звука достига до пускащия топката. Втората компонента се намира по следния начин:

$$t_2 = \frac{h}{V_{зв}},$$

където $V_{зв} = 325\,m/s$.

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V_{зв}}$$

следователно:

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{9{,}81}} + \frac{h}{325} = 2{,}1\,s.$$

Получава се следното квадратно уравнение относно неизвестната височина на сградата:

$$4{,}905.h^2 + 105625.h - 2284777 = 0.$$

След решаване на полученото квадратно уравнение и вземайки в предвид само положителния корен (отрицателния корен има смисъл на отрицателна височина на сградата), се получава:

$$h = 21.61\ m.$$

1.3. Права задача от Динамика на несвободна материална точка

Точка, която поради наложени връзки е принудена да се движи по неподвижна повърхнина или крива, се нарича несвободна материална точка.

Основното уравнение необходимо за решаване на задачи, получава вида:

$$m.\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i^a} + \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{N_j}, \tag{9}$$

където $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i^a}$ – сума на всички активни сили действащи на точката, $\sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{N_j}$ – сума от реакциите на всички връзки наложени на точката.

1.3.1. Определение

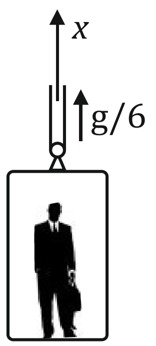
При известни закон на движение на точката и известни активни сили, да се намерят реакциите на връзките.

1.3.2. Решение на правата задача

Използва се уравнение (9), ако знаем ускорението $\vec{a}$, съответно закона за движението $\vec{r}(t)$ и активните сили $\overrightarrow{P_i^a}$, за да се определят реакциите на връзките.

1.3.3. Решени примери

Пример 1



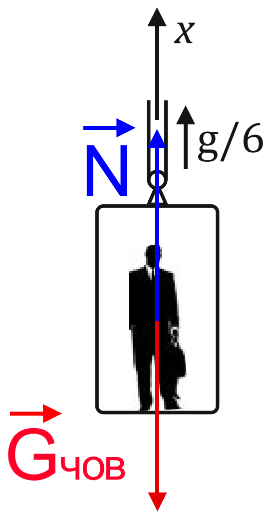
Фиг.5.

Човек с $m_{\text{чов}} = 70\ kg$ пътува в асансьор, който ускорява за кратко време до $g/6 = 1.635\ m/s^2$. Да се определи големината на силата *N*, която пода на асансьора упражнява върху краката на пътника?

Решение

Примерът е права задача от несвободна материална точка, защото е известно ускорението, а се търси големината на силата, която възниква между човека и пода на асансьора.

Изчислителната схема е показана на фиг. 6. Движението се осъществява само по едно направление, означено с x на фигурата, т.е. уравнение (9) ще се проектира само върху една ос.



Фиг.6.

Задачата изследва преходния режим на движение на асансьора, т.е. това е времето, през което асансьорът от нулева начална скорост достига на номиналната си такава, само през този интервал от време ускорението е различно от нула.

Съставяме диференциалното уравнение на движение по ос x:

$$m.\ddot{x} = -G_{\text{чов}} + N.$$

След заместване на ускорението със зададеното по условие, получаваме:

$$m_{\text{чов}}.\left(\frac{g}{6}\right) = -m_{\text{чов}}.g + N,$$

$$m_{\text{чов}}.\left(\frac{g}{6} + g\right) = N.$$

Откъдето за големината силата се получава:

$$N = 70.11{,}445 = 801{,}15\ [N].$$

По време на преходния режим големината на получената сила е по-голяма в сравнение със случая на покой или равномерно движение на асансьора, т.е. нейната големина би трябвало да се отчита при оразмеряването на въжето на асансьора.

1.4. Обратна задача от Динамика на несвободна материална точка.

1.4.1. Определение

При известни активни сили, приложени върху точката, да се определят:

- ✓ Законът за движение на точката;
- ✓ Реакциите на връзките.

1.4.2. Постановка на обратната задача

Материална точка се нарича несвободна, ако тя не може да извършва произволно движение в пространството. Телата, които ограничават движението на материалната точка и налагат зависимости между нейните координати и проекциите на нейната скорост, се наричат връзки.

Връзките биват:

Геометрични – те налагат определени зависимости само между координатите на точките. При налагане на една връзка от този вид, материалната точка се движи върху една повърхнина. При налагане на две независими връзки, материалната точка се движи върху крива. Едновременното действие на три връзки се обезсмисля, защото те биха определили една неподвижна точка.

Кинематични – те налагат зависимости между проекциите на скоростта на точката.

Двустранни – Наложените връзки принуждават материалната точка да остане върху някаква повърхнина или крива. Те още се наричат удържащи.

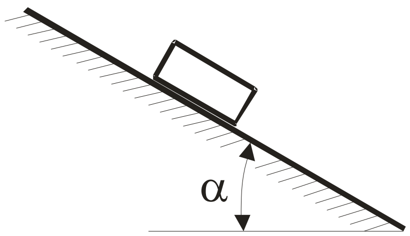
Едностранни - По време на движение, при наложени едностранни връзки, материалната точка може да напуска повърхнината или кривата само в една посока. Те още се наричат неудържащи. Пример за такава връзка е окачената на кабел електрическа крушка или стъпил върху пода човек.

Материалната точка се движи под действие на активните сили върху дадена повърхнина или крива. Съответно те действат върху точката със сила на връзката, която не е известна.

При решаването на тази задача изхождаме от принципа на освобождаването, според който движението на несвободна материална точка не се изменя, ако я освободим от наложените и връзки и ги заменим със съответните сили (реакции) на връзките.

1.4.3. Решени примери

Пример 1

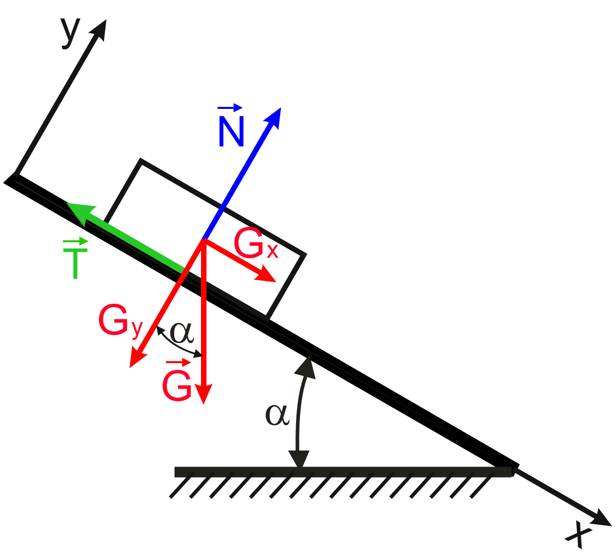


Фиг.7.

Тяло с маса $m = 15\ kg$ може да се плъзга по наклонена под ъгъл $\alpha = 30^0$ равнина. Коефициентът на триене при плъзгане между тялото и равнината е $\mu = 0.4$. На колко е равно ускорението на тялото?

Решение

Първата стъпка от решаването на задачата е да бъдат избрани координатната система, спрямо чийто оси ще бъдат съставени диференциалните уравнения на движения на база уравнение (9), както и посоките на действащите на материалната точка сили (фиг.8).



Фиг.8.

За улеснение при съставянето на диференциалните уравнения на движение се избира посоката на оста *x*, да съвпада с посоката на движение на материалната точка, а оста *y* да е перпендикулярна на нея. Следващата стъпка е да се нанесат посоките на действащите върху точката сили. Те са три на брой: 1. Силата на тежестта (G), която действа винаги перпендикулярно на земната повърхност; 2. Нормалната реакция (N), която според третия закон на Нютон действа в посока от равнината на подпиране към тялото; 3. Сила на триене при плъзгане (T), която действа винаги в посока обратна на посоката на възможното движение на материалната точка, т.е. обратно насочена на оста x.

Въз основа на уравнение (9), съставяме диференциалните уравнения на движение.

По ос *x*:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} + N.$$

По ос *y:*

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}.$$

Реакцията на връзката действа само по ос y – нормалната реакция.

След заместване на силите в съответните уравнения получаваме:

$$m\ddot{x} = G_x - T,$$

$$m\ddot{y} = N - G_y.$$

Движението на тялото е възможно само по ос x, следователно ускорението по ос y е равно на 0, откъдето се намира: $N = G_y = m.g.sin\alpha.$ Ъгълът между направлението на силата на тежестта (*G*) и проекцията и по ос y (*Gy*) е равен на ъгъла на наклона на равнината, защото ъгли с взаимно перпендикулярни рамене са равни.

От закона на Кулон за триене при плъзгане се намира големината на силата на триене:

$$T = \mu.N = \mu.m.g.cos\alpha.$$

За ускорението $\ddot{x}$, се получава:

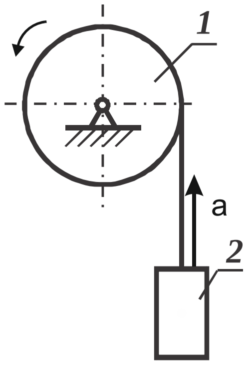
$$m.\ddot{x} = m.g.sin\alpha - \mu.m.g.cos\alpha.$$

След съкращаване на масата и заместване с големината на ъгъла и коефициента на триене при плъзгане окончателно за ускорението на материалната точка се получава:

$$\ddot{x} = 9{,}81.\sin(30) - 0{,}4.9{,}81.\cos(30) = 4{,}905 - 3{,}408 = 1{,}497\frac{m}{s^2}.$$

Така получената големина на ускорението на материалната точка означава, че тя се движи равноускорително, т.е. скоростта и се увеличава по линеен закон.

Пример 2



Фиг.9.

Товар с тегло $G = 450\,N$ се издига вертикално нагоре с ускорение *a*. На колко е равно това ускорение, ако усилието във въжето е 5 пъти по-голямо от теглото на товара?

Решение

Движението на товара се извършва само по едно направление, следователно ще бъде съставено едно диференциално уравнение на движение по означената на фиг.10 ос x.

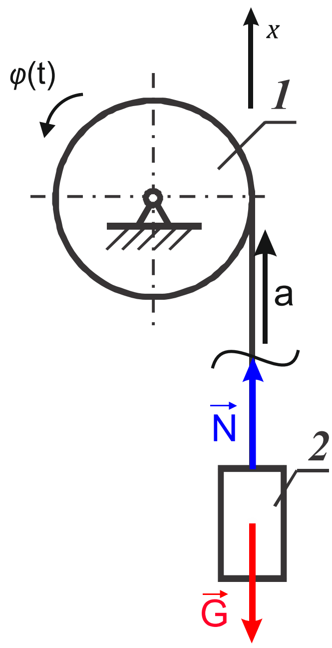
$$m\ddot{x} = N - G. \tag{10}$$

В условието на задачата не е дадена масата на товара, а неговото тегло, следователно тя ще бъде равна на:

$$\frac{G}{g} = m.$$

След заместване в (10), се получава:

$$\frac{G}{g}.a = 5.G - G \Rightarrow a = 4.g = 4.9{,}81 = 39{,}24\frac{m}{s^2}.$$



Фиг.10.

2. Общи теореми от динамика на материална точка

2.1. Количество на движение на материална точка

2.1.1. Определение

Векторната величина количество на движение $\vec{q}$ е равна на произведението от масата на точката и векторът на скоростта ѝ:

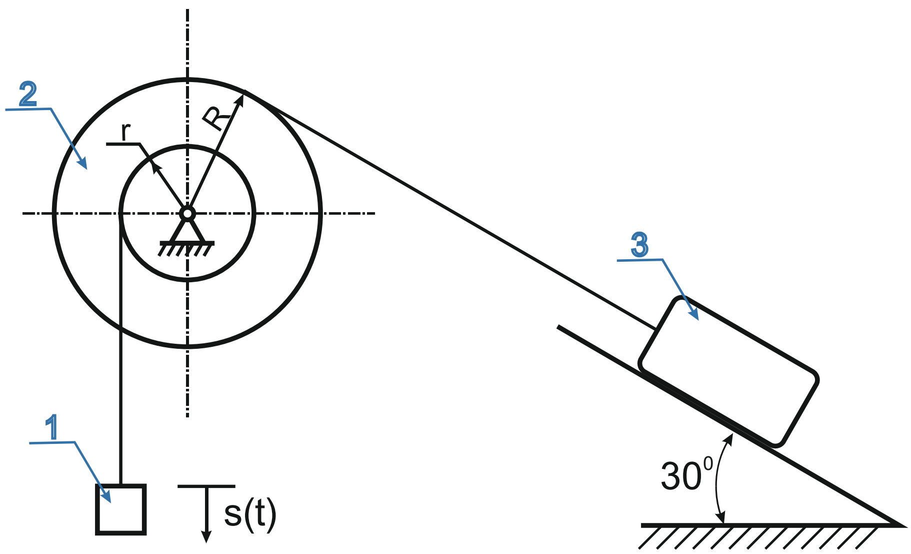
$$\vec{q} = m.\vec{v}\ . \tag{11}$$

Дименсията в система SI е: [*kg.m/s*].

2.1.2. Решени задачи

Пример 1

Да се определи големината на количеството на движение q на тяло 3, ако същото има маса $m_3 = 20\ kg,$ а законът за движение на тяло 1 е $s(t) = 3.t$. Радиусите на тяло 2 са $R = 0.3\ m,\ r = 0.15\ m.$



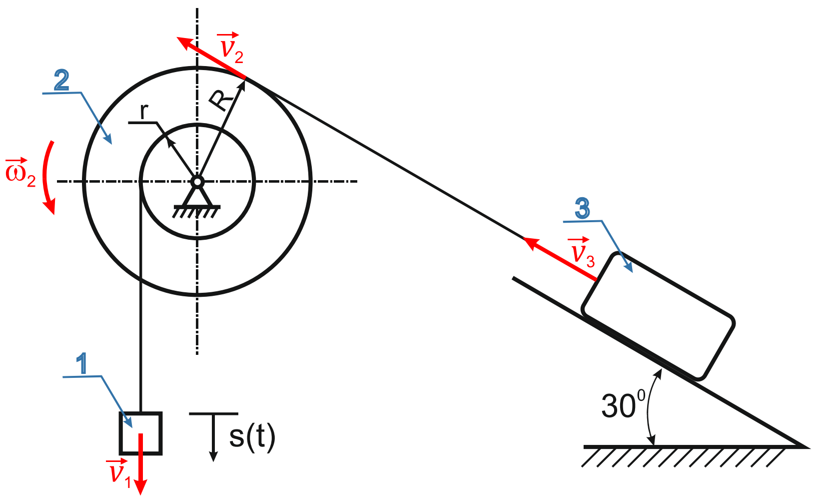
Фиг.10.

Решение

Първата стъпка от решаването на задачата е да се определят видовете движения, които телата извършват.

Тяло 1 извършва транслационно движение; Тяло 2 – (ролков блок) извършва въртене около неподвижна ос; Тяло 3 извършва транслационно движение, издигане по наклонената равнина (фиг.11).

За да се реши задачата трябва да бъде намерена скоростта на тялото 3.



Фиг.11.

Намирайки първата производна на закона за движение на тяло 1, за скоростта му се получава:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\dot{s(t)}} = (3.t)' = 3\frac{m}{s}.$$

Ъгловата скорост на тяло 2 е:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r} = \frac{3}{0.15} = 20\ s^{-1}.$$

Периферната скорост на ролковия блок v_2, се намира от:

$$v_2 = \omega_2.R = 20.0{,}3 = 6\frac{m}{s}.$$

Въжето, което свързва тяло 3 и с ролковия блок се приема за неразтегливо, следователно $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3}$.

За големината на количеството на движение на тяло 3 по формула (11), се получава:

$$q = m_3.v_3 = 20.6 = 120\ kg.\frac{m}{s}.$$

Пример 2

Да се определи големината на количеството на движение на материална точка с маса $m = 10\ kg$, която се движи по оста x, по закона $x(t) = 5.\left[t^2 - sin(\frac{\pi}{4}.t)\right]$, в момента $t = 2\ s$.

Решение

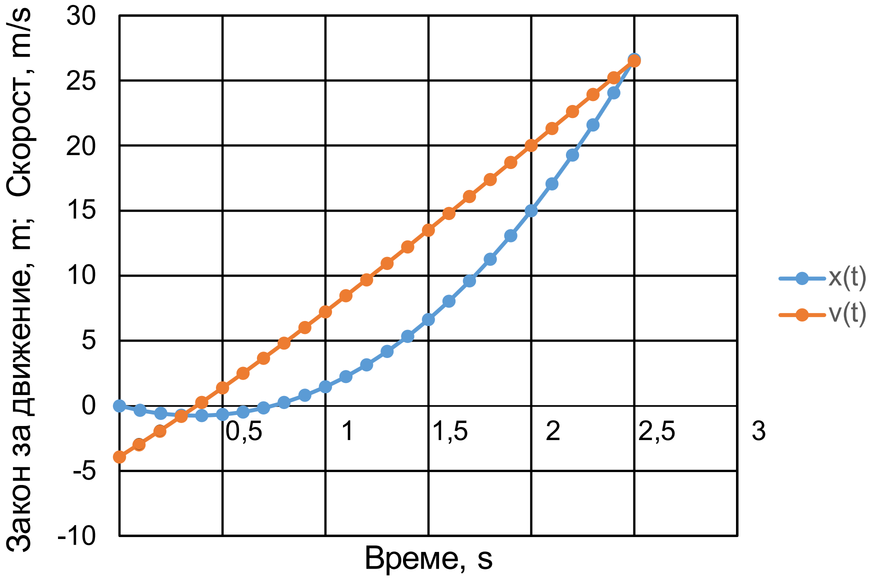
На фиг.12 са представени графиките на функциите на закона за движение и скорост на материалната точка.

За да се определи големината на количеството на движение на материалната точка, трябва да се намери първата производна на закона за движение и да пресметне стойността на получения израз за момент от време $t = 2\,s$:

$$v = \dot{x(t)} = 5.\left[t^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}.t\right)\right]' = 5.\left(2.t - \frac{\pi}{4}.cos\left(\frac{\pi}{4}.t\right)\right) = 5.(2.2) = 20\frac{m}{s}.$$

Големината на количество на движение се получава по формула (11):

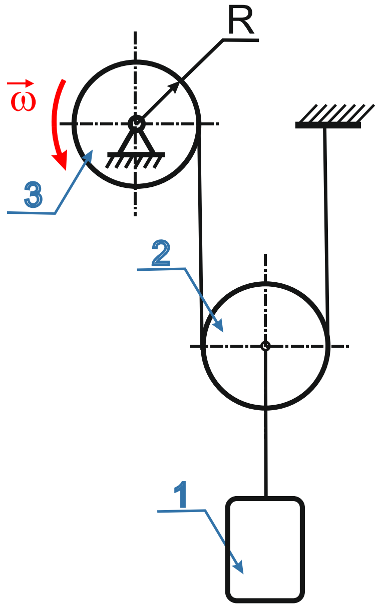
$$q = m.v = 10.20 = 200\,kg.\frac{m}{s}.$$



Фиг.12.

Пример 3

Да се определи големината на количеството на движение q на тяло 1 (фиг.13), имащо маса $m_1 = 12\,kg$, ако $\omega_1 = 25\,s^{-1}$, $R = 0.1\,m$.

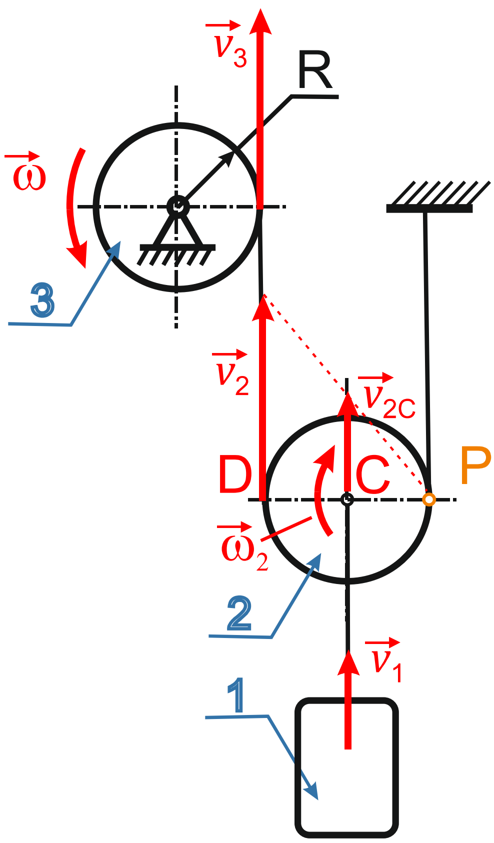


Фиг.13.

Решение

За да се изчисли големината на количество на движение на тяло 1, трябва да се определят видовете движения, които телата извършват. Тяло 1 извършва транслационно движение, тяло 2 извършва равнинно движение, тяло 3 извършва въртене около неподвижна ос.

На фиг.14 са нанесени посоките на линейните и ъглови скорости както и моментния център (т.P) на въртене на тялото, извършващо равнинно движение (2).



Фиг.14.

От дадените стойности за ъгловата скорост и радиус на тяло 3 се намира периферната скорост v_3:

$$v_3 = \omega.R = 25.0{,}1 = 2{,}5\frac{m}{s}.$$

Въжето, свързващо телата 2 и 3 се приема за неразтегливо. Следователно $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2}$.

От определението за моментния център на скоростите на тяло 2, извършващо равнинно движение, следва че $v_P = 0$.

Скоростта на центъра на тяло 2 се определя от:

$$v_{2C} = \omega_2.\overline{PC},$$

а скоростта на периферна точка по:

$$v_2 = \omega_2.\overline{PD}.$$

Всички точки от тяло 2 имат една и съща ъглова скорост, следователно скоростите на точки зависят само от разстоянието от точката до моментния център на скоростите. В дадения случай разстоянието $\overline{\mathrm{PD}}$ е диаметър, а $\overline{\mathrm{PC}}$ е радиус на тялото. Следователно:

$$v_{2C} = \frac{V_2}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25\frac{m}{s}.$$

Въжето, което свързва тяло 1 и тяло 2, се приема също за неразтегливо. С други думи скоростите на всички точки от въжето са еднакви. Следователно $\overrightarrow{\mathrm{v}_{2\mathrm{C}}} = \overrightarrow{\mathrm{v}_1}$.

За количеството на движение се получава:

$$q_1 = m_1.v_1 = 12.1{,}25 = 15\frac{m}{s}.$$

2.2. Кинетична енергия на материална точка

2.2.1. Определение

Кинетична енергия на материална точка е скаларна величина. Тя представлява полупроизведението от масата и квадрата на скоростта на точката:

$$E_k = \frac{m.v^2}{2}. \tag{12}$$

От определението е видно, че това е енергия на движението, т.е. притежават я материални точки които имат скорост.

В система SI се измерва в [$kg.m^2/s^2$] – [J] – „Джаул“.

2.2.2. Решени задачи

Пример 1.

Материална точка с маса $m = 6\ kg$, се движи по закона $x(t) = 10.t$. Да се намери кинетичната ѝ енергия?

Решение

Първата стъпка е да се определи, от дадения закон за движение скоростта на точката:

$$v = \dot{x} = (10.t)' = 10\frac{m}{s}.$$

След това, се замества в (12) и се получава:

$$E_k = \frac{m.v^2}{2} = \frac{6.10^2}{2} = 300\ J.$$

Пример 2.

Материална точка с маса $m = 9\ kg$ се движи праволинейно с постоянно ускорение $\vec{a}$, с големина $a = 3\ m/s^2$. Да се определи кинетичната енергия на точката в края на третата секунда ($t = 3\ s$), ако началната ѝ скорост $\overrightarrow{v_0}$ има големина $v_0 = 3\ m/s$.

Решение

При зададено ускорение на материалната точка, за да се намери скоростта, е необходимо то да се интегрира:

$$v = \int a.dt = \int 3.dt = 3.t + C.$$

От началното условие за скоростта се намира интеграционната константа:

$$\mathrm{C} = v_{0(t=0)} = 3\frac{m}{s}.$$

Окончателно за скоростта за момент от време $t = 3\ s$, се получава:

$$v = 3.3 + 3 = 12\frac{m}{s}.$$

По формула (12) се намира кинетичната енергия на материалната точка:

$$E_k = \frac{9.12^2}{2} = 648\ J.$$

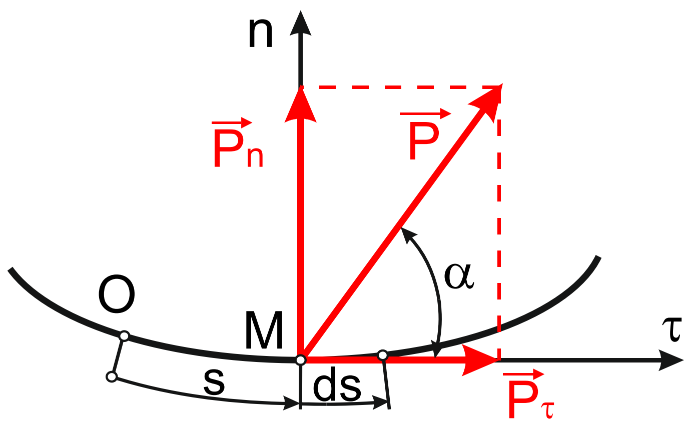
2.3. Работа на сила

2.3.1. Определение

Работа на сила характеризира изменението на скоростта на движеща се материална точка под действие на тази сила за дадено преместване на точката.

Измерва се в „Джаул“ – J=N.m .

- ***Работа на сила за безкрайно малко преместване на приложната точка***



Фиг.15.

На фиг. 15 е дадена т.М, която се движи по зададена крива, под действие на сила $\vec{P}$. За безкрайно малкото преместване ds на материалната точка М елементарната работа на силата е скаларната величина:

$$d * A = P_{\tau}.ds = P.cos\alpha.ds. \qquad (13)$$

- ***Работа на сила за крайно преместване на приложната ѝ точка***

Работата на силата $\vec{P}$ се изчислява като сума от работите на компонентите ѝ:

$$d * A = P_x dx + P_y dy + P_z dz,$$

работа извършва само едноименната компонента, например P_x – преместване по dx.

За крайно преместване от т. M_0 до т. M_1 силата $\vec{P}$ ще извърши работа, определена по:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} P_x dx + P_y dy + P_z dz. \qquad (14)$$

- ***Определяне на работата на характерни сили***

  - Работа на сила на тежестта

$$A_{(M_0M_1)} = G(z_0 - z_1). \qquad (15)$$

Като се знае, че $|z_0 - z_1| = h$, където h е вертикалното преместване на точката, то за работата на силата на тежестта се получава:

$$A_{(M_0M_1)} = \mp Gh. \qquad (16)$$

Знакът „+“ се отнася за $z_0 > z_1$, а знакът „-„ за $z_0 < z_1$.

  - Работа на еластичната сила

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2), \qquad (17)$$

x_0 и x_1 за началната Δ_H и крайната деформация Δ_K на пружината, за работата на еластичната сила на линейна пружина се получава:

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(\Delta_H^2 - \Delta_K^2). \qquad (18)$$

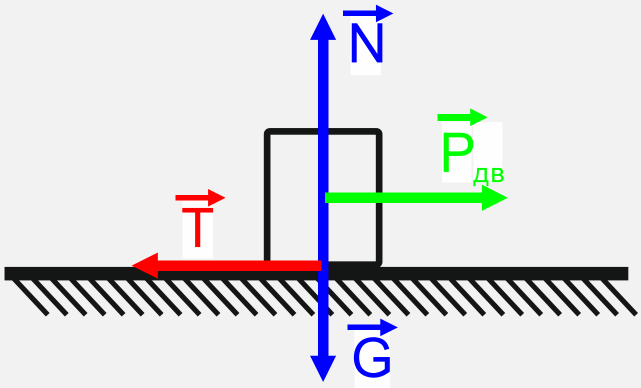
  - Работа на сила на триене

Работата на силата на триене е винаги отрицателна и зависи от дължината на дъгата $\widehat{M_0M_1}$. И се определя по:

$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} \mu N ds. \qquad (19)$$

Указание!!!

На фиг. 16 е дадена материална точка, която се движи в указаната посока под действие на двигателна сила. При това движение върху тялото действат сила на триене при плъзгане, сила на тежестта и нормална реакция.



Фиг.16.

Трябва да се оцени работата на всяка от приложените върху тялото сили.

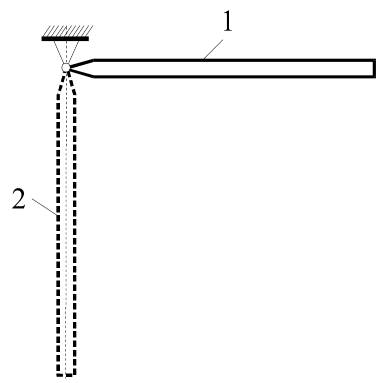
Изхожда се от формула (13), където работа на сила е: произведението от сила, косинус на ъгъла, който силата сключва с възможното направление на движение на материалната точка и изминатия от нея път.

1. Двигателната сила – тя извършва положителна работа, защото тя „помага“ тялото да се движи под действие на тази сила. Ъгълът между нея и посоката на изминатия път е нула градуса, а $\cos 0° = 1$, т.е. знакът е „+“;
2. Нормалната реакция – тя не извършва работа, защото под нейно действие тялото не се движи в посоката на приложената двигателна сила. Ъгълът между нея и посоката на движение е деветдесет градуса, а $\cos 90° = 0$;
3. Сила на триене – тя извършва отрицателна работа, защото тя „пречи“ на тялото да се движи в посоката на действие на двигателната сила. Ъгълът между нея и посоката на движение е сто и осемдесет градуса, а $\cos 180^0 = -1$;
4. Сила на тежестта – тя не извършва работа поради същата причина, както в случая на нормалната реакция.

2.3.2. Решени задачи

Пример 1.

Хомогенен прът (фиг.17) с тегло $G = 250\ N$ и дължина $l = 0{,}6\ m$ се придвижва във вертикална равнина от положение 1 в положение 2. На колко е равна работата, извършвана от силата на тежестта му?

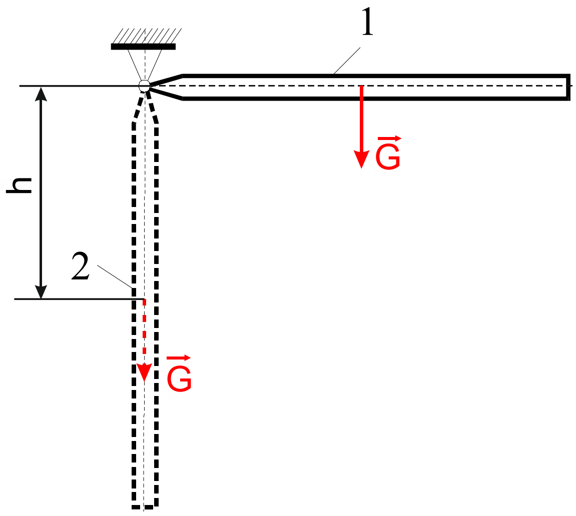


Фиг.17.

Решение

Работата на силата на тежестта на този прът ще намерим по формула (16). За да се придвижи пръта от положение „1“ в положение „2“ силата на тежестта помага това движение да се случи. Т.е. работата ѝ ще бъде положителна, знакът във формула (16) ще бъде +.

На фиг.18 е показано местоположението на приложната точка на силата на тежестта и в двете положения.



Фиг.18.

След заместване в (16), получаваме:

$$\mathrm{A}_G = G.h = G.\frac{l}{2} = 250.\frac{0{,}6}{2} = 75\ J.$$

Пример 2.

Да се намери работата, необходима за издигане на тяло с $m = 1000\ kg$ на височина $h = 5\ m$ под ъгъл $\alpha = 30^0$? Коефициентът на триене при плъзгане на тялото върху наклонената повърхност е $\mu = 0.4$.

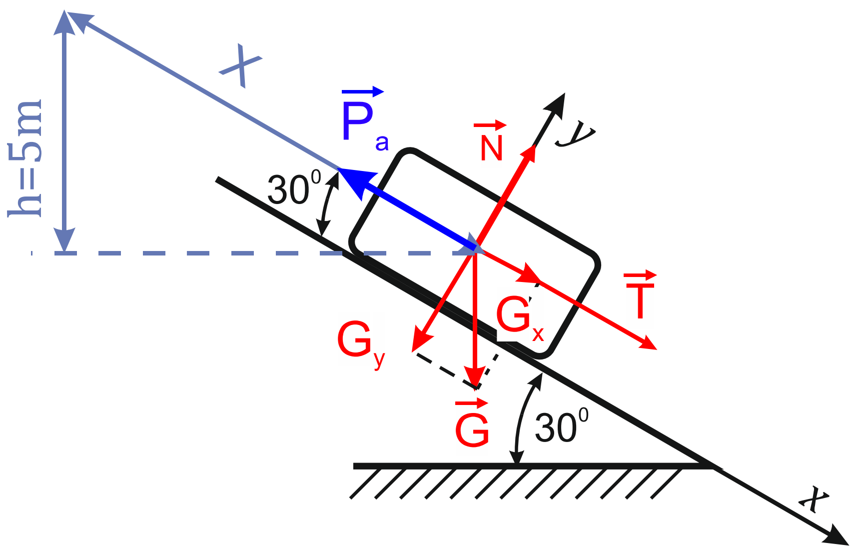
Решение

На фиг.19 са нанесени действащите върху тялото сили. Тялото се приема за материална точка. Трябва да намерим работата на силата за издигане на тялото, от фиг.19 е видно, че на силата която ще издигне тялото на височина от *5m* се противопоставят две сили – компонентната на силата на тежестта по ос x и силата на триене T.

$$\overrightarrow{P_a} = |\overrightarrow{G_x} + \vec{T}|.$$

Работата на силата $\overrightarrow{P_a}$ е равна на:

$$\mathrm{A}_{Pa} = (G_x + T).X.\cos(0)$$



Фиг. 19

Изминатия път X, за който се изчислява работата се намира от правоъгълния триъгълник:

$$X = \frac{h}{sin\,30} = \frac{5}{0{,}5} = 10\,m.$$

Компонентната на силата на тежестта по оста x е:

$$G_x = m.g.sin(30) = \frac{m.g}{2}.$$

Силата на триене е равна на:

$$\mathrm{T} = \mu.N = \mu.G_y = \mu.m.g.cos(30) = m.g.0{,}346.$$

След заместване работата на $\overrightarrow{P_a}$ е равна на:

$$\mathrm{A}_{Pa} = \left(\frac{m.g}{2} + m.g.0{,}346).X.\cos(0)\right) = m.g.X.(0{,}5 + 0{,}346).1 = 1000.9{,}81.10.0{,}846$$

$$\mathrm{A}_{Pa} = 82992{,}6\,J.$$

2.4. Мощност

2.4.1. Определение

Мощността е производната на работата по времето – това е работата, извършена от една сила, за единица време:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{P_\tau ds}{dt} = P_\tau v. \tag{20}$$

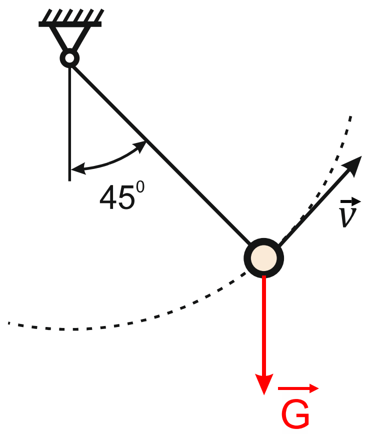
Мощността е скаларна величина, която е равна на произведението на тангенциалната компонента на силата (съвпадаща с направлението на скоростта) и скоростта.

В системата SI мощността се измерва във ватове – W. Често се използва 1kW=1000 W.

2.4.2. Решени примери

Пример 1

Топчето на математично махало (фиг.20) има тегло $G = 25\ N$ и в указаното на фигурата положение се движи със скорост $v = 6\ m/s$. На колко е равна мощността на теглото му?



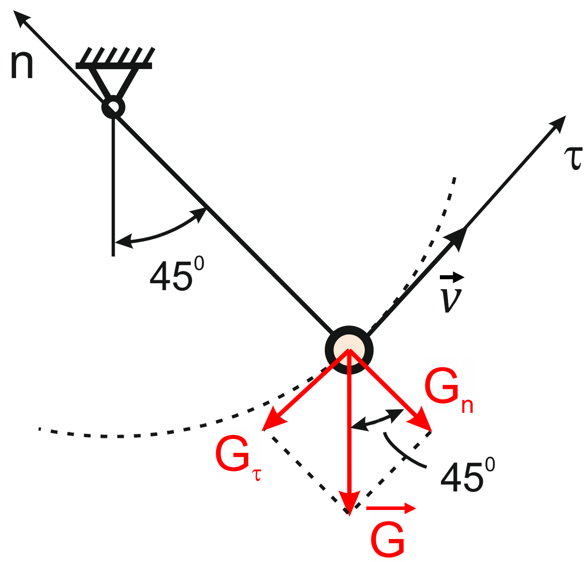
Фиг.20.

Решение

За да се намери мощността на теглото на топчето, прието за материална точка, трябва да се въведе координатна система Oτn, в която ще разложим силата на тежестта (фиг.21).

Компонентната на силата на тежестта по ос τ, участва в израза за определяне на мощността, защото тя е колинеарна на скоростта на топчето и е с противоположен знак. По (20) за мощността се получава:

$$N_{G_\tau} = -G_\tau . v = -G . sin\ 45°. v = -25.0{,}707.6 = -106{,}05\ W.$$



Фиг.21.

Мощността се получава с отрицателна стойност, защото посоката на проекцията на силата на тежестта е противоположна на посоката на вектора на скоростта. С други думи в този момент от движението на топчето, силата на тежестта се противопоставя на „изкачването“ на топчето в посока на скоростта.

Пример 2.

Човек с маса $m_{чов} = 60\ kg$ се изкачва по стълби за $\Delta t = 7\ s$. Да се определи средната мощност необходима му за изкачването, ако височината на стълбите във вертикално направление е $\Delta h = 3\ m$.

Решение

След заместване във формула (20), получаваме:

$$N = \frac{A_G}{\Delta t} = \frac{m_{чов}.g.\Delta h}{\Delta t} = \frac{60.9{,}81.3}{7} = 252{,}26\ W.$$

Получената стойност е средната мощност необходима за изкачването на стълбите от човека.

3. Динамика на материална система

3.1. Въведение в геометрия на масите

3.1.1. Маса на материална система

Масата на материална система е равна на алгебричната сума от масите на отделните материални точки или тела, изграждащи системата:

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

3.1.2. Масов осов инерционен момент

Скаларната величина, която е алгебрична сума от произведенията на масите на всички точки от материалната система по квадрата на разстоянията им до една ос, се нарича масов инерционен на материалната система до тази ос:

$$J_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Дименсията на осовия инерционен момент е [*kg/m*^{2}]. Той е положително число.

В някои случаи се използва понятието инерционен радиус, дефиниран спрямо ос:

$$J_Z = \mathrm{M}.\rho_u^2.$$

Инерционен радиус е разстоянието от точка от материалната система (тялото), в която е съсредоточена цялата маса на системата (тялото) до разглежданата ос, така, че масовият осов инерционен момента на тази точка да е равен на масовия осов инерционен момент на системата (тялото) спрямо същата ос.

В края на ръководството в приложение са дадени формулите за пресмятане на осови инерционни моменти на някои хомогенни линии, повърхнини и тела.

3.1.3.Центробежни инерционни моменти

Асиметрията на разпределението на масата на материална система се отчита посредством дефинирането на центробежни инерционни моменти:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i\,; J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i; J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i.$$

Центробежните инерционни моменти могат да бъдат или положителни или отрицателни или равни на нула.

3.1.4. Теорема на Хюйгенс

Теоремата дава зависимостта между осовите инерционни моменти на едно тяло спрямо две успоредни оси:

Масовият инерционен момент на едно тяло спрямо произволна ос е равен на масовия инерционен момент на тялото спрямо оста, която е успоредна на произволната ос и минава през масовия център на тялото и добавено произведението между масата на тялото и квадрата на разстоянието между тези две оси.

$$J_{Oz1} = J_{Cz} + Mh^2.$$

3.1.5. Главни инерционни оси

Ако ос Oz е ос на симетрия, то тя се нарича главна инерционна ос на тялото за т.O, защото центробежните инерционни моменти, съдържащи в индексите си наименованието на оста, са равни на нула.

Всяка ос на симетрия на твърдо тяло е главна инерционна ос за всяка своя точка.

За всяко твърдо тяло съществуват три взаимно перпендикулярни оси, за които центробежните инерционни моменти са равни на нула, следователно тези оси са главни инерционни оси.

3.2. Теорема за изменение на кинетичната енергия на материална система

3.2.1. Кинетична енергия на материална система

Кинетичната енергия на материална система е скаларна величина, която е алгебрична сума от кинетичните енергии на отделните точки от системата:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (21)$$

Кинетичната енергия на материална система която се състои от няколко тела, е сума от кинетичните енергии на всяко от телата.

3.2.2. Кинетична енергия за различни случаи на движение на тяло

- За транслационно движещо се тяло:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_c^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) v_c^2 = \frac{M v_c^2}{2}. \quad (22)$$

Всички точки от тяло което извършва транслационно движение имат равни скорости със скоростта на масовия център на тялото, следователно в формула (22) участва само скоростта на масовия център на тялото.

- ***Кинетична енергия на тяло въртящо се около неподвижна ос***

Тялото се върти около неподвижна ос. Скоростта на точка отдалечена от нея на разстояние r е $v_i = \omega r_i$. След заместване в (21) се получава:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2.$$

Изразът в скобите е масовия осов инерционен момент на тялото, следователно:

$$\mathrm{E_k} = \frac{1}{2}\mathrm{J_z}\omega^2. \qquad (23)$$

- Кинетична енергия на тяло извършващо равнинно движение

Равнинното движение е суперпозиция от транслация и въртене около полюс, при което ъгловата скорост остава една и съща без значение къде е избран полюса. Ако изберем за полюс масовия център на тялото C, кинетичната енергия ще бъде сума от транслационна и въртелива част на това движение. Изразът за кинетична енергия се получава от (22) и (23):

$$\mathrm{E_k} = \frac{\mathrm{M}\mathrm{v_C^2}}{2} + \frac{\mathrm{J_z}\omega^2}{2}. \qquad (24)$$

3.2.3. Случаи за изчисление на работа

- Работа на сила, приложена към въртящо се около неподвижна ос тяло

За завъртане на тялото на ъгъл φ_1 работата на силата $\vec{P}$ е:

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi,$$

където: $M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{z,i}$

мощността на силата $\vec{P}$, респ. силите, действаща, респ. действащи върху въртящо се тяло е:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z.\omega \qquad (25)$$

Мощността представлява произведението от големината на момента спрямо оста на въртене и ъгловата скорост на тялото.

- ***Работа на сила на триене, действаща на търкалящ се диск***

При търкаляне без плъзгане работата на силата на триене, е равна на нула за произволно преместване на тялото.

Точката на контакт на тяло, което се търкаля по повърхността, е моментен център на скоростите, следователно $v_P = 0$, от което следва, че $ds_P = 0$.

Изразът за елементарната работа на силата на триене при търкаляне е:

$$d^*A = -Tds_P.$$

Въз основа на горното за работата се получава: $d^*A = 0$.

- ***Работа на момента на триене при търкаляне***

За преместване на център на търкалящия се диск (масовият му център) от положение C в положение C_0, работата на момента е :

$$\mathrm{A} = \int_{S_0}^{S_1} -\frac{f}{R}Nds_C, \qquad (26)$$

където:

N – големина на нормална реакция,

f - коефициент на триене при търкаляне,

R – радиус на диска.

При $N=const$, формула (26) добива вида:

$$A = -\frac{f}{R} N(s_1 - s_0). \tag{27}$$

Но величината f/R е малка, което позволява момента на триене при търкаляне да се пренебрегва при наличие на други съпротивителни сили.

3.2.4. Теорема за изменение на кинетичната енергия на материална система

Израз на теоремата в диференциална форма:

Производната на кинетичната енергия на материална система по времето е равна на сумата от мощностите на действащите върху системата сили външни и вътрешни сили.

$$\frac{dE_k}{dt} = N^e + N^i. \tag{28}$$

Израз на теоремата в интегрална форма:

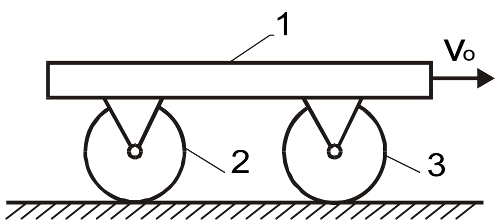
Изменението на кинетичната енергия за дадено преместване на материалната система е равно на сумата от работата на действащите върху системата външни и вътрешни сили за същото преместване.

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{01}^e + A_{01}^i \tag{29}$$

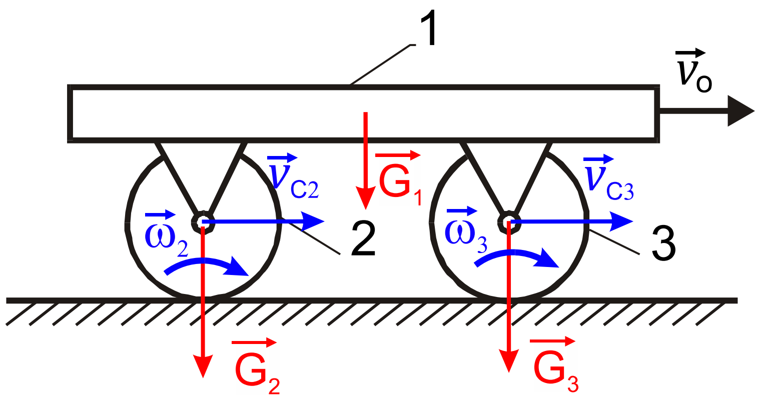
3.2.5. Решени примери

Пример 1

Количка има тяло 1 с маса $m_1 = 25\ kg$ и две еднакви колела 2 и 3 с маси по $m_2 = m_3 = 2\ kg$ и радиус $R_2 = R_3 = 0{,}1\ m$, които са хомогенни дискове. Да се определи кинетичната енергия на системата, в момента, в който количката се е движила със скорост $v_0 = 2\ m/s$.



Фиг.22.



Фиг.23.

Решение

На фиг.23 са нанесени скоростите и силите на тежестта на всички тела от материалната система.

Първата стъпка от решението на задачата е да се определят видовете движения, които телата от системата извършват.

Тяло 1 извършва транслационно движение. Телата 2 и 3 извършват равнинно движение – търкаляне без приплъзване върху неподвижна повърхност.

За да намерим кинетичната енергия на материалната система е необходимо да намерим сумата от кинетичните енергии на всяко от телата по формули (22-24).

Кинетичната енергия на тяло 1 е:

$$E_{k1} = \frac{m_1 . v_0^2}{2} = \frac{25.4}{2} = 50\,J.$$

Кинетичната енергия на тяло 2 е равна на тяло 3 (двете тела с еднакви маси и радиуси). Намира се по формула (24):

$$\mathrm{E}_{\text{к}2} = \mathrm{E}_{\text{к}3} = \frac{\mathrm{m}v^2}{2} + \frac{\mathrm{I_z}\omega^2}{2}.$$

За да се определи скоростта на центъра на колело 2 е необходимо да се знае, че центъра на колелото е твърдо свързан с тяло 1, което означава, че скоростта на тяло 1 е равна на скоростта на центъра на колелото:

$$\overrightarrow{v_{c2}} = \overrightarrow{v_{c3}} = \overrightarrow{v_0}.$$

Колелата 2 и 3 са приети за хомогенни дискове. Това позволява осовия инерционен момент на колела 2 и 3 се изчислява по следната формула:

$$I_{c2} = I_{c3} = \frac{m . R^2}{2}.$$

Те извършват равнинно движение без приплъзване, следователно точката на контакт между колелото и основата е моментен център на скоростите. Скоростта на центъра на колелата е вече определена, тогава ъгловата им скорост се намира от:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_{c2}}{R}.$$

Окончателно за кинетичната енергия колела 2 и 3 получаваме:

$$\mathrm{E}_{к2} = \mathrm{E}_{к3} = \frac{\mathrm{m}v_{C2}^2}{2} + \frac{1}{2}.\frac{m.R^2}{2}.\left(\frac{v_{c2}}{R}\right)^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{m}v_{C2}^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{m.\cancel{R^2}.v_{C2}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{4}.\mathrm{m}v_{C2}^2 =$$

$$= \frac{3}{4}.\mathrm{m}v_0^2 = 0{,}75.2.4 = 6\,J.$$

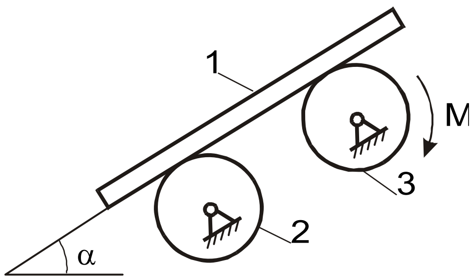
Кинетичната енергия на материалната система е:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = \frac{m_1.v_0^2}{2} + 2.\frac{3.m.v_0^2}{4} = 50 + 2.6 = 62\,J,$$

$$E_k = (m_1 + 3.m).\frac{v_0^2}{2} = 62\,J,$$

като изразът $(m_1 + 3.m) = m^*$ се нарича приведена маса на системата.

Пример 2



Фиг.24.

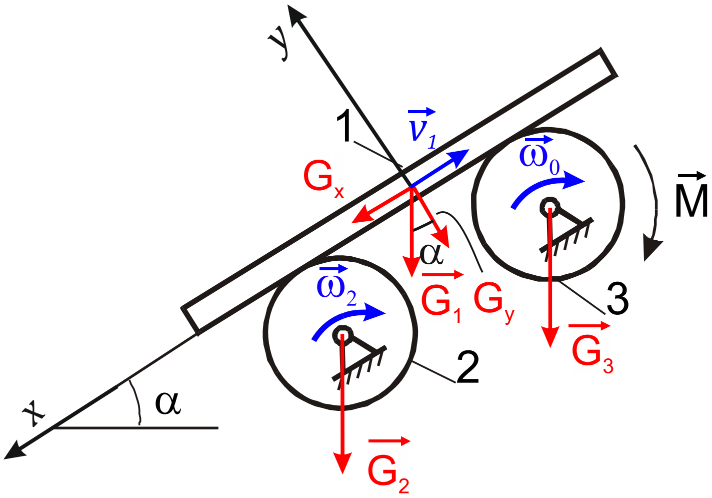
Зъбна рейка 1 с тегло $G_1 = 15\,N$ G е зацепена със зъбни колела 2 и 3 с еднакви маси $m = 0{,}5\,kg$ и радиуси $R_2 = R_3 = 0{,}2\,m$, под ъгъл α=30^0; На зъбно колело 3 приложен въртящ момент $M = 2\,Nm = const$. Да се определи мощността на външните сили, приложени върху телата от системата, в момента, в който колело 3 се върти с ъглова скорост $\omega_0 = 2\,s^{-1}$ в посока на въртящия момент?

Решение

На фиг.25 са показани посоките на скоростите, силите на тежестта и приложения въртящ момент на всички тела съставящи материалната система.

Първата стъпка от решението на задачата е да се определят видовете движения, които телата от системата извършват.

Тяло 1 извършва транслационно движение. Телата 2 и 3 извършват въртене около неподвижна ос.



Фиг.25.

Сумата на мощностите на външните за материалната система сили е:

$$N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Мощността на силата на тежестта на тяло 1, извършващо транслационно движение, е:

$$N_1 = -G_x.V_1.$$

Знакът „-„ е поради противоположните посоки на скоростта и компонентната на силата на тежестта.

В изчислението на мощността участва проекцията на силата на тежестта по оста x, която има големина: $G_x = G.sin\alpha = G.sin\,30° = {}^{G}/_{2}$, и скоростта v_1, която е равна на скоростта в точката на зацепване на рейката 1 и зъбно колело 3. От дадената по условие ъглова скорост на задвижващото зъбно колело, намираме: $v_1 = \omega_{0.}R_3$.

Окончателно за мощността на силата на тежестта на зъбната рейка получаваме:

$$N_1 = -\frac{G}{2}.\omega_{0.}R_3.$$

Мощността на силата на тежестта на зъбно колело 2 е равна на нула. То е задвижвано зъбно колело – няма приложен въртящ момент и оста на въртене е неподвижна:

$$N_2 = 0.$$

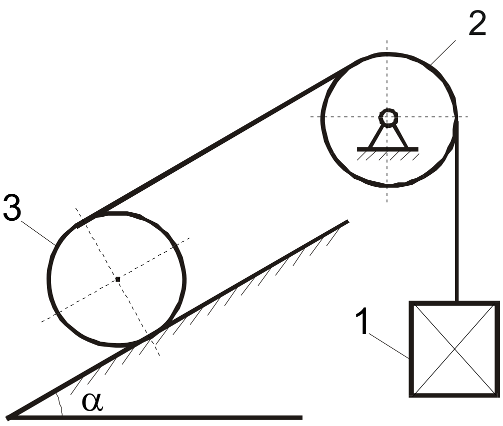
Мощността на приложения към задвижващото зъбно колело 3 момент се изчислява от:

$$N_3 = \mathrm{M}.\omega_0.$$

Окончателно за мощността на външните за материалната система сили се получава:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = -\frac{G}{2}.\omega_{0.}R_3 + 0 + \mathrm{M}.\omega_0 = -7{,}5.2.0{,}2 + 2.2 = 1\,W.$$

Пример 3



Фиг. 26.

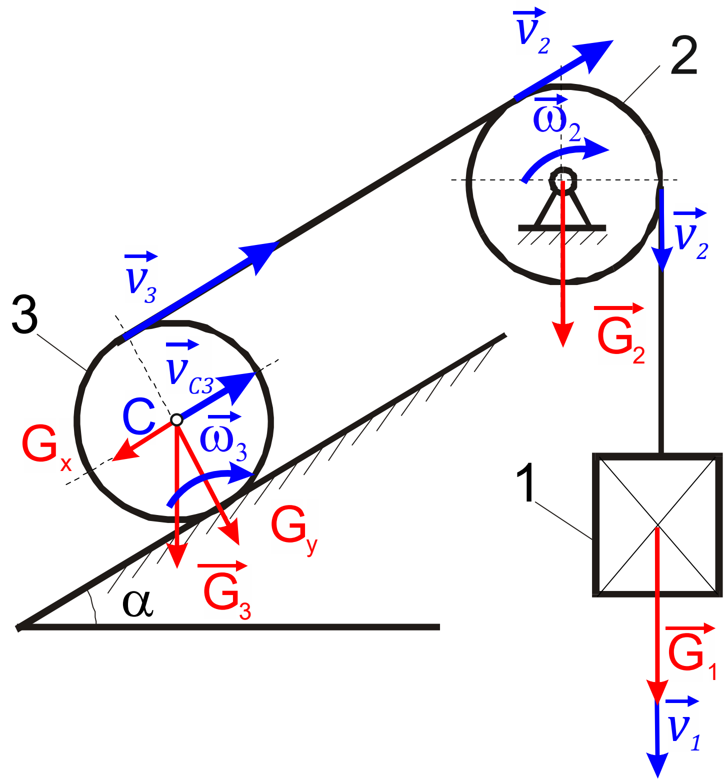
Товар 1 с тегло $G = 100\,N$ е окачен на въже, навито на цилиндър 3 и преминаващо през отклонителната ролка 2 (фиг.26). Телата 2 и 3 са хомогенни дискове и имат тегла $G_2 = G_3 = 50\,N$ и радиуси $R_2 = R_3 = 1\,m$. Да се определи мощността на външните сили, приложени върху телата от системата, когато товар 1 има скорост $v_1 = 2\,m/s$, насочена надолу, а ъгъла на наклонената повърхност е $\alpha=30^0$.

Решение

На фиг.27 са показани скоростите и силите на тежестта на всички тела от материалната система.

Първата стъпка от решението на задачата е да се определят видовете движения, които телата от системата извършват.

Тяло 1 извършва транслационно движение. Тяло 2 извършва въртене около неподвижна ос и тяло 3 извършва равнинно движение без приплъзване.



Фиг.27.

Сумата на мощностите на външните за материалната система сили е:

$$N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Мощността на силата на тежестта на тяло 1, което извършва транслационно движение, е:

$$N_1 = G_1 . v_1.$$

Върху тяло 2 действа сила на тежестта. Приложната ѝ точка е неподвижна, следователно:

$$N_2 = 0.$$

Тяло 3 извършва равнинно движение без приплъзване. Единствената сила, която е приложена върху него е силата на тежестта, но приложната ѝ точка е подвижна, следователно тя реализира мощност.

Скоростта на центъра на тяло 3 се намира от формулата за скорост на тяло извършващо равнинно движение (виж. Пример 3 от 2.1.2):

$$v_{C3} = \frac{v_3}{2}.$$

Въжето, свързващо телата от системата, се приема за неразтегливо, следователно скоростите по дължина на въжето запазват своите големини (посоките им са различни):

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1}.$$

Компонентната от силата на тежестта, която участва в реализирането на мощността, е насочена успоредно на равнината на търкаляне:

$$G_x = G_3 . sin\ 30° = \frac{G_3}{2}.$$

За мощността на тяло 3 окончателно се получава:

$$N_3 = -G_{3x} . V_{C3} = -\frac{G_3}{2} . v_1.$$

Мощността на материалната система е:

$$N = G_1 . v_1 + 0 - \frac{G_3}{2} . v_1 = 100.2 - 25.2 = 150\ W.$$

4. Динамика на идеално твърдо тяло

4.1. Динамика на тяло въртящо се около неподвижна ос

4.1.1. Определение

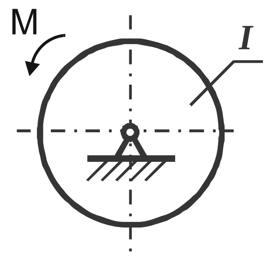
$$I_z \ddot{\varphi} = M_z. \tag{30}$$

Уравнение (30) представлява диференциалното уравнение на въртене на идеално твърдо тяло около неподвижна ос. Това уравнение е аналогично на основното уравнение на динамика на точка: на ъглово ускорение $\ddot{\varphi}$ съответства ускорение $\vec{a}$; осов инерционен момент I_z съответства маса m на точката и на приложен въртящ момент $\overrightarrow{M_z}$ съответства сила приложена на точката $\vec{P}$. Осовият инерционен момент е количествена мярка за инертността на тяло въртящо се около неподвижна ос, т.е. колкото е по-голям инерционния момент, толкова по-трудно ще се развърта въртящо се тяло.

4.1.2. Решени примери

Пример 1

Тяло (фиг.28) с инерционен момент $I = 0{,}5\ kg.m/s^2$ се върти около неподвижна ос по закона $\varphi(t) = 5.t^3 + 2$. Да се намери стойността на въртящия момент M при $t = 3\ s$.



Фиг.28.

Решение

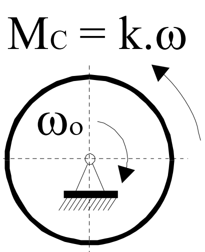
От дадения закон за въртене на тялото, чрез двукратно диференциране, се получава ъгловото ускорение на тялото, което е необходимо за решаване на уравнение 30:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = (5.t^3 + 2)'' = 30.t\ \ s^{-2}.$$

С получения израз за ъглово ускорение се замества в уравнение (30), за $t = 3\ s$:

$$M = 0{,}5.30.3 = 45\ Nm.$$

Пример 2



Фиг..29

Ротор (фиг.29) с осов инерционен момент $I = 1{,}5\ kg.m/s^2$ се върти с ъглова скорост ω_0. За колко време, след изключване на двигателния момент, ъгловата скорост на ротора ще стане два пъти по-малка, ако върху него действа съпротивителен момент $M_C = 0{,}3\omega$?

Решение

В уравнение (30) се замества с израза за съпротивителния момент (отрицателния знак показва, че под действие на този момент ротора извършва закъснително движение) и го представяме във вида:

$$I.\frac{d\omega}{dt} = -0{,}3.\,\omega.$$

След разделяне на променливите:

$$I.\frac{d\omega}{\omega} = -0{,}3.\,dt.$$

Последващо интегриране в границите от ω_0 до $\omega_0/2$, и съответно за време от t_0=0 до t - търсеното от нас време:

$$I.\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{d\omega}{\omega} = -0{,}3.\int_0^t dt,$$

$$I.\left(ln\frac{\omega_0}{2} - \ln\omega_0\right) = -0{,}3.\,t.$$

Прилага се правилото за логаритъм от разлика и се умножава по „-1“:

$$I.\left(ln\frac{\omega_0}{\frac{\omega_0}{2}}\right) = 0{,}3.\,t,$$

$$1{,}5.\,ln2 = 0{,}3.\,t.$$

Откъдето:

$$t = 5.\,ln2 = 5.0{,}639 = 3{,}465\ s.$$

За 3,465 s роторът ще намали два пъти началната си ъглова скорост.

Пример 3

Върху ротора на електрически двигател действа въртящ момент $M = 300.\left(1 - \frac{\omega}{400}\right)$. Да се определи максималното ъглово ускорение ε_{max}, ако инерционният момент на ротора е $I = 3\ kg.m/s^2$.

Решение

Приема се, че в началния момент от време роторът на двигателя не се върти ω_0=0.

За да се реши задачата трябва да се определи максималната стойност на израза за въртящия момент:

$$\mathrm{M} = 300.\left(1 - \frac{\omega}{400}\right),$$

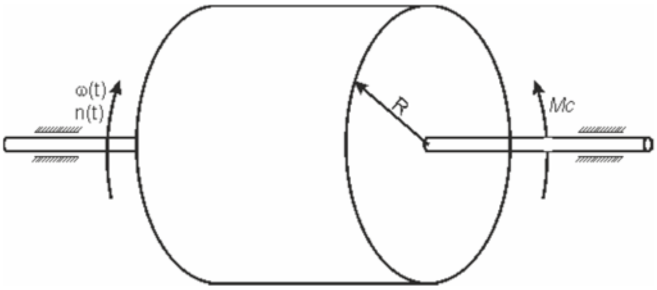
при $\omega = 0 \Longrightarrow \mathrm{M}_{max} = 300\ Nm.$

Максималната стойност на въртящия момент се замества в уравнение (30) и се намира максималната стойност на ъгловото ускорение:

$$\varepsilon_{max} = \frac{M_{max}}{I} = \frac{300}{3} = 100\ s^{-2}.$$

Пример 4

Хомогенен плътен цилиндър с маса $m = 12\ kg$ и радиус $r = 0{,}4\ m$ се върти около неподвижна ос, определена от лагерите (фиг.30). За да се определи съпротивителния момент Mc при въртенето, е направен експеримент, доказващ, че след изключване на двигателя скоростта на въртене намалява по закона $n = (955/(1 + 10t))\ tr/min$. Да се пресметне съпротивителния момент за време $t = 4\ s$.



Фиг.30.

Решение

За да се реши задачата уравнение (30) се записва в следния вид:

$$I_z\ddot{\varphi} = -M_C.\ \text{(a)}$$

Знакът „-„ пред съпротивителния момент отразява факта, че избраната посока на фиг.30 е обратна на посоката на закона за изменение на ъгловата скорост, следователно като краен резултат момента трябва да се получи с положителен знак.

След изключване на двигателя, движението на цилиндъра е закъснително, триенето в лагерите се пренебрегва, т.е. единствения момент който остава да действа е съпротивителния момент.

Осовия инерционен момент се намира по формулата за хомогенен цилиндър:

$$I_z = \frac{mR^2}{2} = \frac{12.\,0{,}4^2}{2} = 0.96\ kg.m^2.$$

След преобразуване на закона за намаляване на скоростта на въртене в единица от система SI и последващо еднократно диференциране се получава израза за ъгловата скорост на цилиндъра:

$$\omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{100}{(1 + 10t)},$$

$$\epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \left[\frac{100}{(1+10t)}\right]' = -\frac{1000}{(1+10t)^2}.$$

Указание !!!

Формулата показва как се намира производна на частно.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = (u'.v - u.v')/v^2$

С получените стойности заместваме в (а) за момента от време $t = 4\ s$:

$$0{,}96.\left(-\frac{1000}{(1+10.4)^2}\right) = -M_C.$$

Окончателно за съпротивителния момент получаваме:

$$M_C = 0{,}571\ Nm.$$

4.2. Принцип на кинетостатиката

4.2.1. Принцип на Д'Аламбер

Това е начин основното уравнение на динамика на точка да се приведе към уравнение от статиката. Въвежда се понятието инерционна сила:

$$\overrightarrow{P^{in}} = -m\vec{a}.$$

Тази сила се полага да бъде равна на една фиктивна сила:

$$\overrightarrow{P^{in}} = \vec{\Phi}.$$

Уравнението на статиката добива вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} + \vec{\Phi} = 0.$$

Полученото равенство представлява Принципа на Д'Аламбер, който гласи:

Ако към действащите върху движещата се точка сили се прибави инерционната сила, получената система сили ще бъде в равновесие.

Инерционната сила $\vec{\Phi}$ се нарича фиктивна (Даламберова) сила, тъй като тя не съществува, за разлика от инерционната сила $\overrightarrow{P^{in}}$, която е реална сила.

Чрез принципа на Д'Аламбер всяка динамична задача (за материална точка) се свежда до една статична задача. Прилагат се условията за равновесие на една конкурентна система от сили и се получават три проекционни уравнения.

4.2.2. Уравнения на кинетостатиката

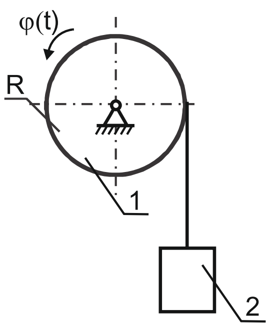
$$\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0,$$

$$\overrightarrow{M_O}^e + \overrightarrow{M_0}^\Phi = 0.$$

Ако в произволен момент от време към външните сили се прибавят и инерционните сили, получената система сили е в равновесие.

Горните зависимости представляват уравненията на кинетостатиката. Те са векторни условия за равновесие, които се проектират по осите на една координатна система. Получава се в общия случай една система от 6 аналитични условия за равновесие.

Пример

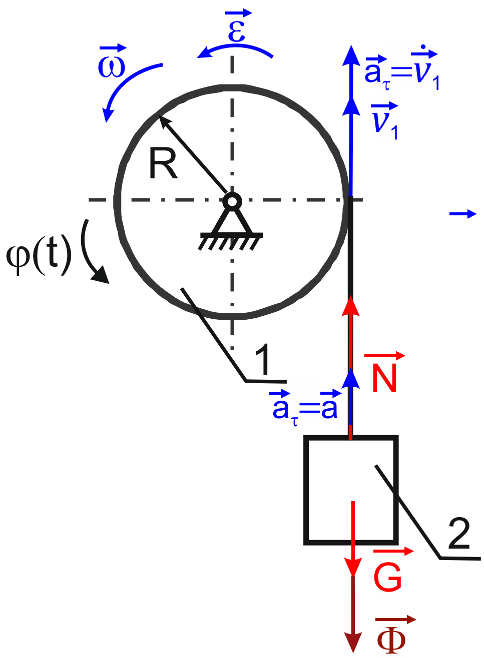


Фиг.31.

Барабан 1 с радиус R се върти около неподвижна ос по закона $\varphi(t) = 19.62t^2$ (фиг.31). На барабана се намотава въже, за свободния край на което е захванат товар с тегло $G = 2000\,N$. Да се определи усилието N във въжето, ако $R = 0{,}5\,m$.

Решение

На фиг.32 са нанесени действащите на тялото сили и ускорение, в съответствие с принципа на Д'Аламбер.



Фиг.32.

Товарът (2) извършва праволинейно транслационно движение под действие на силите $\vec{N}$, $\vec{G}$ и ускорение $\vec{a}$. Което е равно на тангенциалната компонента на ускорението на периферна точка от барабана (1). Тя се намира след двукратно диференциране на закона за въртене на барабана и умножаването ѝ по радиуса на барабана:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2.19{,}62\ S^{-2},$$

$$a = a_\tau = \varepsilon . R = 2.19{,}62.0{,}5 = 19{,}62 \frac{m}{s^2}.$$

Прибавяме и Даламберовата сила:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} = -\frac{G}{g}\vec{a}.$$

Големината ѝ е:

$$\Phi = \frac{2G\varepsilon R}{g}.$$

Съставяме уравнението за равновесие между силите:

$$\vec{G} + \vec{\Phi} = \vec{N}.$$

Откъдето:

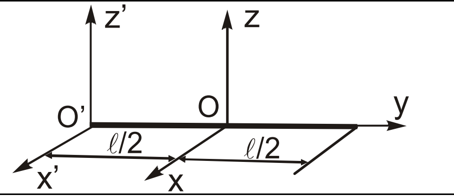
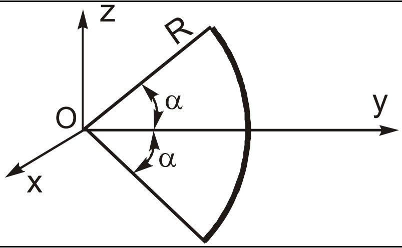
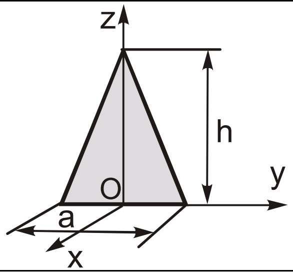
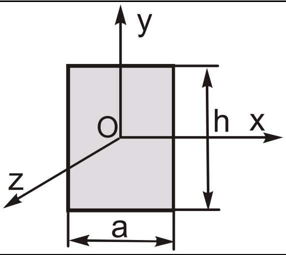
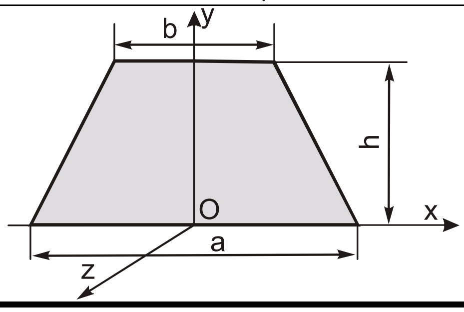
$$N = G + \Phi = G + \frac{2G\varepsilon R}{g} = G\left(1 + \frac{2R\varepsilon}{g}\right) = 2000\left(1 + \frac{2.0{,}5.19{,}62}{9{,}81}\right) = 6000\ N.$$

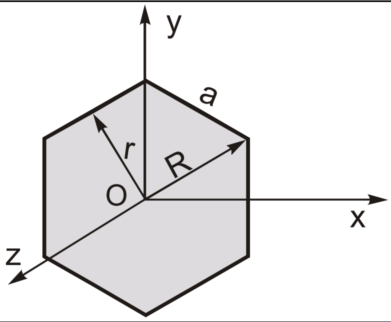
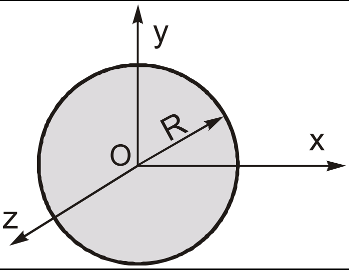
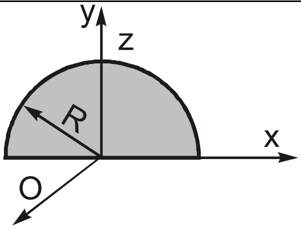
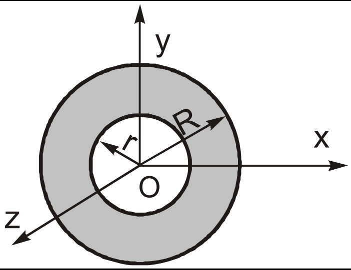
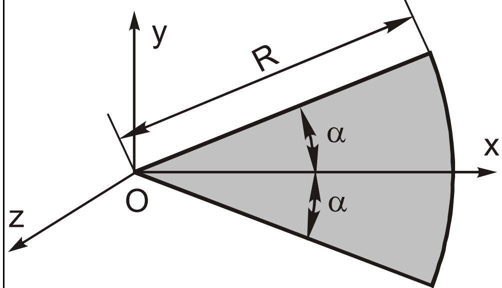
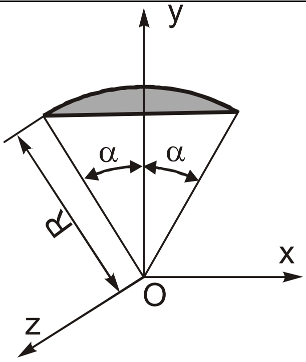
Големината на усилието във въжето е три пъти големината на теглото на товара.

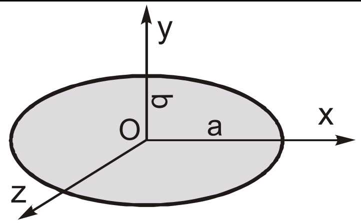
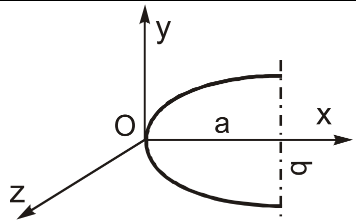
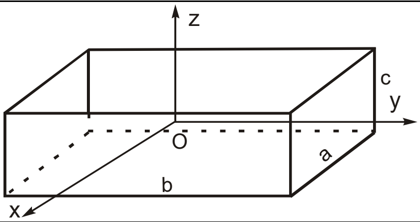
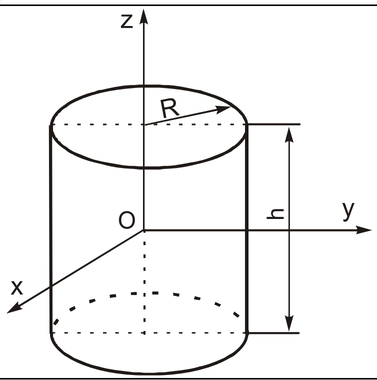
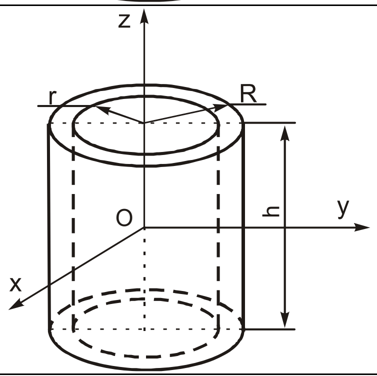
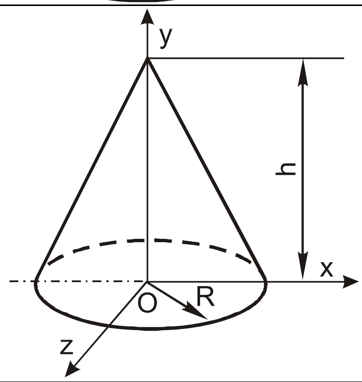
Приложение

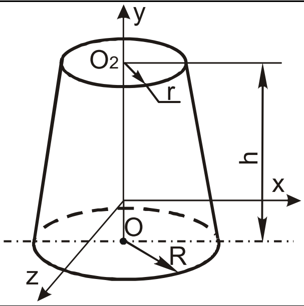
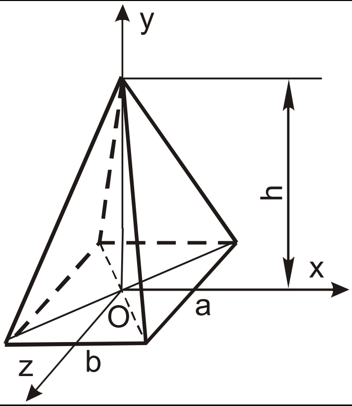
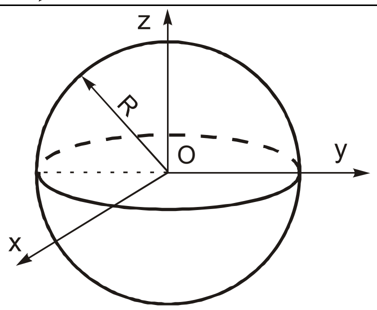
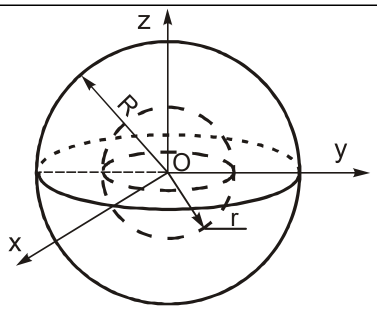
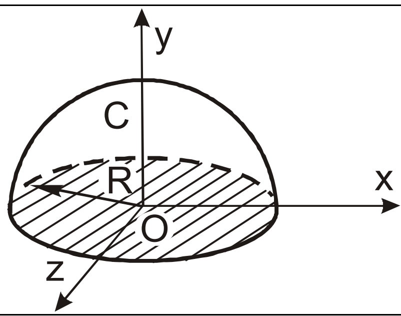
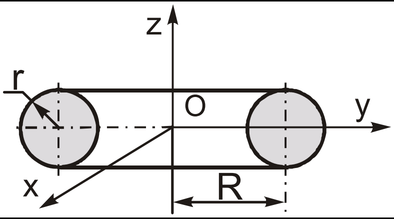
Главни масови инерционни моменти на някои хомогенни линии, повърхнини и тела

Забележка: Всички посочени ъгли в таблицата са в радиани

Форма	*Изображение*	*Масов инерционен момент*
Отсечка		$I_x = I_z = \dfrac{ml^2}{12}$, $I_y = 0$, $I_{x'} = I_{z'} = \dfrac{ml^2}{3}$
Дъга от окръжност		$I_x = mR^2$, $I_y = \dfrac{mR^2}{2}\left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$, $I_z = \dfrac{mR^2}{2}\left(1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
Равнобедрен триъгълник		$I_x = \dfrac{m}{24}\left(a^2 + 4h^2\right)$, $I_y = \dfrac{mh^2}{6}$, $I_z = \dfrac{ma^2}{24}$
Правоъгълник		$I_x = \dfrac{mh^2}{12}$, $I_y = \dfrac{ma^2}{12}$, $I_z = \dfrac{m}{12}\left(a^2 + h^2\right)$
Равнобедрен трапец		$I_x = \dfrac{mh^2}{6}\dfrac{(a+3b)}{(a+b)}$, $I_y = \dfrac{m}{24}\left(a^2 + b^2\right)$, $I_z = \dfrac{m}{24}\dfrac{\left[4h^2(a+3b) + (a+b)(a^2+b^2)\right]}{(a+b)}$

Форма	***Изображение***	***Масов инерционен момент***
Правилен Многоъгълник		$I_x = I_y = \frac{m(6R^2 - a^2)}{24} = \frac{m(12r^2 + a^2)}{48}$, $I_z = \frac{m(6R^2 - a^2)}{12} = \frac{m(12r^2 + a^2)}{24}$
Кръг		$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}, \; I_z = \frac{mR^2}{2}$
Полукръг		$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}, \; I_z = \frac{mR^2}{2}$
Кръгов венец		$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(R^2 + r^2\right), \; I_z = \frac{m}{2}\left(R^2 + r^2\right)$, За тънък обръч $R \approx r$ $I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}, \; I_z = mR^2$
Кръгов сектор		$I_x = \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$, $I_y = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right), \; I_z = \frac{mR^2}{2}$
Кръгов сегмент		$I_x = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$, $I_y = \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$, $I_z = \frac{mR^2}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$

Форма	*Изображение*	*Масов инерционен момент*
Елипса		$I_x = \frac{mb^2}{4}$, $I_y = \frac{ma^2}{4}$, $I_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$
Парабола		$I_x = \frac{mb^2}{5}$, $I_y = \frac{3ma^2}{7}$, $I_z = \frac{m}{35}(15a^2 + 7b^2)$
Правоъгълен Паралелепипед		$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$, $I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$, $I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Прав кръгов Цилиндър		$I_x = I_y = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$, $I_z = \frac{mR^2}{2}$
Кух кръгов цилиндър		$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(R^2 + h^2 + \frac{h^2}{3}\right)$, $I_z = \frac{m}{2}\left(R^2 + r^2\right)$ За тънкостенна тръба $R \approx r$ $I_x = I_y = \frac{m}{12}\left(6R^2 + h^2\right)$, $I_z = mR^2$
Прав кръгов Конус		$I_x = I_y = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right)$, $I_z = \frac{3}{10}mR^2$ Околна повърхнина на конуса $I_z = \frac{mR^2}{2}$

Форма	***Изображение***	***Масов инерционен момент***
Прав пресечен Конус		$I_y = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$ Околна повърхнина на пресечен конус $I_y = \frac{m}{2}\left(R^2 + r^2\right)$
Права правоъгълна пирамида		$I_x = \frac{m}{80}(4b^2 + 3h^2)$, $I_y = \frac{m}{80}(4a^2 + 3h^2)$, $I_z = \frac{m}{20}(a^2 + b^2)$
Сфера (кълбо)		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$ За сферична повърхнина $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} mR^2$
Куха сфера		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Полусфера		$I_x = I_y = \frac{83}{320} mR^2$, $I_z = \frac{2}{5} mR^2$
Кръгов пръстен с кръгово сечение (тор)		$I_x = I_y = \frac{m}{8}\left(4R^2 + 5r^2\right)$, $I_z = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$

Литература

1.Бъчваров, С. Н., А. А. Джонджоров, Б. И. Чешанков, Н. К. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по Теоретична механика, С, 1973.

2.Максимов Й. Т., Теоретична механика, ЕксПрес, Габрово, 2016.

3.Мешчерски и., Сборник задачи по теоретична механика,. Техника. София. 1995.

4.Тепавичаров Хр., Д. Валачев, А. Анчев, Въпроси и задачи за самоподготовка по Механика, УИ В. Априлов, Габрово, 2010.

5.Beer, F.P., E. R. Jonhston Jr, D. F. Mazurek, P. J. Cornwell, Vector mechanics for engineers: statics and dynamics, tenth edition, 2013.

6.Meriam, J. L., L. G. Kraige, Engineering Mechanics: Volume 2, Dynamics, seventh edition, 2012.